Math. P.
108

Ph. 2727.b.
Math. P. 108

Mathesis. Analysis finitorum et infinitorum in genere 355.

<36602737610013
<36602737610013
Ba
F

Die
Lehre von den Grenzen
als
Hauptmoment der Geometrie

aufgestellt

von

W. Detmold.

Mit Kupfern.

Göttingen, 1804.
Bey Heinrich Dieterich.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Bey jedem Versuche muß wenigstens die subjective Zuversicht desjenigen, der den Versuch wagt, für einen glücklichen Ausgang haften. Denn, wenn man nicht mit der Gewißheit den Versuch anstellt, daß man gerade die Antwort erhalten wird, welche man von dem Versuche selbst verlangt; so läuft man sehr leicht Gefahr, bey der ersten Verunglückung schon, Versuche aufzugeben, die, wenn man sie nur mit sicherer Erwartung mehrere Mahle wiederhohlt hätte, gerade das würden geleistet haben, (und oft noch mehr,) was man von ihnen verlangt hat *a*).

Wer daher mit Zuversicht versucht, verdient nicht, daß man ihn, seines guten Glau-

a) Das schönste Beyspiel hiervon hat uns Kepler gegeben; unermüdet hat er seinen bald ermüdenden Calcul angestellt, bis endlich das Resultat seinem Verlangen ein Genüge that.

bens wegen, gleich an den Schranken abweiset, weil er nicht mit aller devoten Bescheidenheit, und sogar mit ausdrücklicher Verzweiflung an einem glücklichen Erfolg, sich ankündiget; um so viel mehr ist man berechtiget, sich vieles von ihm zu versprechen, weil er gewiß nie nachlassen wird, seine gemachte Hoffnung, durch rastlose Thätigkeit und unnachläßlichen Eifer, aufrecht zu erhalten, gesetzt auch, daß er nicht im Stande wäre, sie durch glückliche Resultate legitimiren zu können. Wenn ich daher von dem gegenwärtigen Versuche gerade keine unglückliche Resultate erwarte, so geschieht es mehr, um mich in meinem Vorsatze, die Wissenschaft auf festere Principien zu setzen, beharrlicher zu machen, als das Publicum auf große Erwartungen zu spannen.

Es ist, meines Wissens, noch immer ein unausgeführter Versuch geblieben, die Hauptmomente der Geometrie aus den einfachen Begriffen von Grenzen herzuleiten. Die Lehre von den Grenzen hat überhaupt erst nach der Entdeckung des Differenzial-Calculs angefangen, ein bedeutender Gegenstand der Unter-

suchung zu werden, indem man sich mit der Hoffnung geschmeichelt hat, durch die Lehre von den Grenzen, die so oft mißverstandenen Grundsätze des Differenzial-Calculs bis zur klarsten Einsicht zu erheben. Allein man kann von dieser Lehre (so wie von mehreren anderen,) mit Recht behaupten: man hat nur angefangen, aber nicht ausgeführt. Mehrere Bücher über den Differenzial-Calcul haben angefangen, die Principien desselben aus den einfachen Gründen der Grenzen herzuleiten; bald aber wieder aufgehört, und den Lehrling mit der Wahrheit der Resultate zufrieden gestellt! Man hat diese Lehre mehr als einen speciellen Theil der Geometrie angesehen, als eine Fundamentallehre der ganzen Geometrie. Daher glaubte ich gerade kein unnützes Geschäft zu übernehmen, die Elemente der Geometrie ganz auf die Lehre von den Grenzen zurück zu führen. Ich habe mich nicht allein bemühet, Alles aus den Gründen von den Grenzen herzuleiten, sondern ich habe es mir sogar zum Gesetz gemacht, mich nicht um ein Haar breit davon zu entfernen. Ich

habe auf alle weitläuftige Beweise gern Verzicht gethan, wenn mir die Gründe der Grenzen hinreichend genug schienen, den Beweis einzusehen.

Man wird es aus dem kärglichen Gehalte dieser Schrift schon schließen können, daß der Zweck derselben nicht auf einen Vortrag der ersten Elemente der Gometrie berechnet ist: ihn zu erreichen, habe ich von dem Vielen, welches ein solcher Vortrag erfordert, zu wenig, und von dem Wenigen, welches in dieser Schrift enthalten ist, zu viel gesagt. Dieses sehe ich deutlich ein, und gestehe es offenherzig, bevor es mir zum Vorwurf gemacht werden könnte. Allein die Lehre von den Grenzen ist auch weit entfernt, den angeblichen Zweck erreichen zu wollen; vielmehr war in dieser Hinsicht ihr Zweck, einen Plan anzugeben, nach welchem sie glaubt, daß fernerhin die Lehrbücher am zweckmäßigsten eingerichtet werden könnten.

Es gibt sicher keine Wissenschaft, deren Faßlichkeit dem Menschen weniger Schwierig-

keiten machen darf, als die Geometrie; weil sie gerade die einzige Wissenschaft ist, die wir aus uns selbst schöpfen. Die Einsichten können hier, durch gar keine äußere Umstände erschwert werden, wie dieß sehr oft der Fall ist, wenn wir die Natur und die Erscheinungen derselben auf Geometrie zurück bringen wollen, wo sie alsdann in dem wissenschaftlichen Gewande fast wie neu aus unserem Geiste hervortritt, nachdem sie die oft undurchsichtige Hülle der Empyrie ganz abgelegt hat. Allein gerade weil sie bloß eine Erkenntniß seiner selbst ist, muß auch die Verständniß derselben, in dem Verständniß seiner selbst bestehen, und hierin haben es, meiner Meinung nach, die meisten Vorträge verfehlt. In ihnen ist Alles darauf berechnet, einen fertigen Geometer zu bilden, aber keinen verständigen. — Der größte Theil unserer Lehrbücher über Geometrie, ist mehr eine Uebungsschule, als ein eigentlicher Unterricht. Daher haben wir auch so sehr viele Meßkünstler und so sehr wenige Mathematiker. Männer genug, die die Mathematik gleichsam als eine Kunst durch

Fertigkeit sich eigen gemacht haben, und sie eben so dem Lehrling **kunstmäßig** vortragen; sehr wenige aber die von den Gründen ihrer Kunst Rechenschaft geben können.

Die ersten Elemente einer Wissenschaft, müssen eigentlich in denjenigen Principien bestehen, wodurch die **Möglichkeit** einer Wissenschaft eingesehen werden kann. Nun läßt sich, meiner Ueberzeugung nach, gar keine gründliche Einsicht in die Geometrie, selbst nur ihrer Möglichkeit nach, von einem erwarten, der sich nicht von den Gründen des Differenzial-Calculs fest überzeugt hält. Die Gründe des Differenzial-Calculs gehören also mit zu den Elementen der Geometrie. Allein eine falsche Deutung des Wortes **elementarisch**, hat es gleichsam zum Gesetz gemacht, diese Gründe, so gewissenhaft wie möglich, zu umgehen. Man glaubte nähmlich, daß die ersten Elemente der Geometrie gerade deßhalb **erste Elemente** wären, weil sie von allen Begriffen des Differenzial-Calculs befreyet vorgetragen werden könnten. Es konnte also nicht wohl fehlen, daß ein solcher Vortrag,

der es gleichsam darauf angelegt hat, die ersten Gründe seiner Wissenschaft zu umgehen, nicht allein ganz zwecklos, sondern auch ganz deform ausfallen mußte; denn oft sah man sich in die Nothwendigkeit versetzt, diese ersten Gründe unter Begriffen zu verstecken, deren Faßlichkeit mit unerträglichen Schwierigkeiten verbunden ist.

Allen diesen Unbequemlichkeiten abzuhelfen, ist das Bestreben der Lehre von den Grenzen, und es wird daher weniger befremdend seyn, wenn man zum Theil eine andere Ordnung, zum Theil aber auch von vielen Grundsätzen ganz neue Beweise finden wird. Man wird es nicht befremdend finden, daß ich Alles ausgelassen habe, was nicht wirklich elementarisch ist. So habe ich z. B. die Trigonometrie und Stereometrie ganz elementarisch vorgetragen, d. h., ich habe bloß die Gründe aufgestellt und bewiesen, auf welchen diese Lehren beruhen. Die Bestimmung der geometrischen Körper, muß bloß als ein Beyspiel angesehen werden, weil sie auf Regeln beruhet, die noch nicht haben angegeben wer-

den können. Denjenigen aber, denen es bloß um Resultate zu thun ist, und die Geometrie nur in der Absicht erlernen, um sie zur Beförderung der Gemächlichkeit des Lebens benutzen zu können, denjenigen, sage ich, wird es gleichgültig seyn müssen, auf welche Art und Weise sie zu der Erfahrung kommen, die Bestimmung der Kugel gleich angeben zu können. Aber wie gesagt, auf diese Herren ist durchaus nicht gerechnet. Meine Arbeit ist lediglich und allein für die bestimmt, welche mit mir den Wunsch hegen, in der Mathematik wenigstens, nichts ohne gründliche Ueberzeugung anzunehmen.

Göttingen,
den 21. August 1803.

W. H. Detmold.

Einleitung.

Erklärung I.

Man pflegt gewöhnlich einen wesentlichen Unterschied zwischen geometrischen und arithmetischen Größen zu machen, der, meiner Meinung nach, nicht so wesentlich ist, als er wohl Manchem scheinen möchte. Jede Größe, als Summe von möglichen Begrenzungen, ist nur in so fern für uns bestimmt, als ihre Summe von möglichen Begrenzungen zwey wirkliche Begrenzungen zum ersten und letzten Gliede hat, wie dieses weiter unten als Grundsatz wird bewiesen werden.

Die Einheit, als bestimmtes Bewußtseyn, ist also weiter nichts, als eine bestimmte Begrenzung, und diese ist — eine Größe.

So lange der Gegenstand unsers Bewußtseyns im Werden begriffen ist, d. h., so lange er als Größe summirt wird, so lange haben wir keine bestimmte Erkenntniß von ihm; so bald er aber geworden ist, oder, so bald er wirklich begrenzt ist; so bald ist auch unsere Erkenntniß bestimmt, und das bestimmte Bewußtseyn, als das Resultat der wirkli-

chen Begrenzung ist — die Einheit (=1). Ohne Begrenzung ist also keine Einheit möglich.

Wenn wir daher die Zahlen, als arithmetische Größen, von den construirten Größen, als geometrische Größen, unterscheiden wollen, so könnte dieses nur in so fern geschehen, daß wir in der Arithmetik von dem Begrenzten selbst ganz abstrahiren, und bloß auf das Resultat der Begrenzung reflectiren, und dieses ist — das bestimmte Bewußtseyn, oder — die Einheit (=1); da hingegen in der Geometrie zugleich auf das Begrenzte reflectirt wird — auf die angeschaute Größe. Allein dieß berechtiget uns gar nicht einen wesentlichen Unterschied anzunehmen: denn so bald wir unter der Einheit eine bestimmte Begrenzung, also eine Größe, verstehen; so ist es ganz gleichgültig, ob wir das Substratum, die angeschaute Größe, vor uns haben oder nicht.

Erklärung II.

Eine Größe bestimmen heißt: alle mögliche Glieder summiren (wo wir unter mögliche Glieder die möglichen Begrenzungen verstehen,) und die Summe derselben angeben. Größen vergleichen heißt: die Summen vergleichen, nnd untersuchen, wie viele Begrenzungen in der einen

möglich sind, wenn in der andern nur eine möglich ist, um solcher Gestalt aus dem Zustande der einen, den der andern schließen zu können.

Erklärung III.

Die **Bestimmung** der Größen und die **Vergleichung** derselben, ist der Gegenstand der Geometrie. Sie bestimmt entweder Größen, in welchen alle mögliche Glieder ihrer Summen unter sich gleich sind; oder bestimmt sie Größen, in welchen je zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder ungleich sind, und sich jedes Glied mit dem Progreß in der Summe ändert. Auf eben diese Art vergleicht sie Größen, welche bey jeder gemeinschaftlichen Grenze immer das nähmliche Resultat der Vergleichung geben; oder vergleicht sie Größen, die bey jeder andern gemeinschaftlichen Grenze andere Resultate der Vergleichung geben.

Man nennt die erste Art von Größen **unveränderliche Größen**, und die andere **veränderliche Größen**. Mit den ersten beschäftiget sich die niedere Geometrie, mit den andern die **höhere Geometrie**.

Anmerkung.

Man pflegt gewöhnlich die höhere Geometrie **Analysis des Unendlichen** zu nen-

nen: eine Benennung, die daher rührt, weil in ihr die Regeln fest gesetzt werden, wie man aus den Elementen der Größen, die Größen selbst bestimmen kann, und aus der Vergleichung der Elemente die der Größen selbst herzuleiten.

Erklärung IV.

Es gibt noch eine Abtheilung der Geometrie: nähmlich in die reine und angewandte Geometrie. Die erste ist Geometrie, als reine Wissenschaft aufgestellt; die andere ist die Wissenschaft: die Erscheinungen der Natur auf Grenzen zurück zu führen, und sie solcher Gestalt zur Würde einer reinen Wissenschaft zu erheben.

Anmerkung.

Ich wollte, daß man einmahl anfinge, die so genannte angewandte Mathematik, Natur-Philosophie zu benennen. Ist denn Natur-Philosophie etwas anders, als: **die Natur auf Grenzen zurück führen?**

1. Grundsatz.

§. 1.

Die gerade Linie AB (fig. 1.) kann in einer Beziehung als $=0$, in einer andern als $= x$ angesehen werden.

Beweis.

Als Grenze der Fläche, oder als Aufhören der Ausdehnung schlechthin, ist sie offenbar $=0$, weil in und mit ihr die Ausdehnung aufhört, und es alsdann — für uns wenigstens — keine bestimmte Erkenntniß mehr möglich ist. Allein, gerade weil mit ihr jede bestimmte Erkenntniß aufhört, kann sie zugleich als der Anfang aller problematischen Erkenntniß (so nenne ich nähmlich eine jede Erkenntniß, die subjective (für uns) keine Erkenntniß werden kann; deren objective Möglichkeit aber dadurch noch nicht annullirt ist,) angesehen werden, und ist folglich $= x$.

2. Grundsatz.

§. 2.

Wenn wir uns außer der Grenze AB (fig. 2.) die Fläche bereits in CD begrenzt

vorstellen, so werden sie nicht allein die Fläche begrenzen, sondern sie werden sich auch unter sich wechselseitig begrenzen.

Beweis.

Eine jede für sich, ist eine Grenze der Fläche, und folglich auch der Grenze, die wir uns bey einer jeden besonders vorstellen; da nun dieses von einer jeden von ihnen gilt; so folgt: daß sie sich, eine die andere, wechselseitig begrenzen werden.

Folgerung.

Es folgt hieraus: daß wenn zwey Grenzen sich wechselseitig begrenzen sollen, wir sie uns beyde zugleich auf der Fläche gedenken müssen, weil wir uns bey einer jeden besonders die Fläche bereits begrenzt vorstellen müssen.

Erklärung.

§. 3.

Eine bestimmte Summe möglicher Wechselbegrenzungen heißt — die Größe der Grenze. Eine bestimmte Summe möglicher Grenzen heißt — die Größe der Fläche.

3. Grundsatz.

§. 4.

Eine Summe möglicher Grenzen oder Wechselbegrenzungen ist bestimmt, und folg-

lich eine Größe, wenn ihr erstes und letztes Glied wirkliche Begrenzungen sind.

Beweis.

Gesetzt es wäre (Fig. 2.) die einzige Wechselbegrenzung, die wir uns auf der Fläche vorstellen; so ist klar, daß die Summe möglicher Grenzen, sowohl von AB als von CD, nicht angegeben werden kann, weil die Möglichkeit dieser Vorstellung nirgend aufhören kann; denn wir fangen entweder von AB, oder von CD an, und die Möglichkeit dieser Progression müßte mit der Fläche selbst aufhören, die wir uns doch außer diesem Anfange als unbegrenzt vorstellen, und folglich als unaufhörlich; da nun eben dieses für die Wechselbegrenzung der beyden Grenzen gilt; so ist der Satz für beyde bewiesen.

Erklärung.

§. 5.

Gedenken wir uns aber die Grenze IH (Fig. 2.) als eine letzte wirkliche Grenze, die als ein letztes Glied in der Progression möglicher Grenzen von CD angesehen werden muß; so wird die Summe möglicher Grenzen, folglich auch die Summe möglicher Wechselbegrenzungen in AB, bestimmt seyn.

Willkürlicher Satz.

§. 6.

Zwey Grenzen, die wir uns als erstes und letztes Glied in einer Progression möglicher Grenzen vorstellen, heißen — **parallele Grenzen.**

4. Grundsatz.

§. 7.

Zwischen zwey parallele Grenzen ist keine Wechselbegrenzung möglich.

Beweis.

Wenn zwey Grenzen sich wechselseitig begrenzen sollen; so müssen wir uns bey einer jeden die Fläche als bereits begrenzt vorstellen; oder wir müssen uns beyde Grenzen zugleich vorstellen. Die Gleichzeitigkeit der Grenzen ist daher eine nothwendige Bedingung der wechselseitigen Begrenzung. Bey den Parallelen hingegen kann diese Bedingung unmöglich bestehen, denn sie werden als erstes und letztes Glied in einer Progression vorgestellt: folglich ist auch die Wechselbegrenzung unmöglich.

Anmerkung.

Diesen Beweis des Parallelolismus, den meines Wissens noch keiner vor mir geführt hat, wird vielleicht mancher als eine metaphysische Subtilität belächeln! Ich frage aber, in

dem vollen Bewußtseyn der Ueberzeugung: Warum? — Folgt denn nicht aus der Vorstellung der gleichzeitig existirenden Grenzen, die Nothwendigkeit der wechselseitigen Begrenzung? Oder, ist nicht die Vorstellung der gleichzeitig existirenden Grenzen eine nothwendige Bedingung der wechselseitigen Begrenzung? Oder, sollen wir lieber die Convergenz der Grenzen postuliren, und mit jenem unschuldigen Mathematiker zwey convergirende Vitsbohnenstöcke zum Beweise derselben aufstellen? Eins müssen wir doch wählen! Wählen wir das Erstere (und ich dächte, wir müßten es aus Achtung vor der Wissenschaft thun), so folgt auch nothwendiger Weise: wenn wir uns zwey Grenzen in einer solchen Beziehung vorstellen, daß dadurch die Bedingung der Gleichzeitigkeit aufgehoben ist; so kann auch unmöglich wechselseitige Begrenzung der Grenzen Statt finden. Die mannigfaltigen Beweisarten des Parallelolismus haben oft den Gedanken in mir erweckt: ist es möglich, daß ein solcher Fundamentalsatz, wie der des Parallelolismus ist, so mannigfaltiger Beweise fähig seyn kann? Sollte nicht vielmehr ein einziger Beweis nur möglich seyn, der zugleich alle übrigen ausschließt, und die bisher geführten bloß als Eigenschaften der Parallelen aufstellt? Der Erfolg wird entscheiden müssen. —

Erklärung.

§. 8.

Unter Abweichung zweyer Grenzen verstehe ich: die Summe möglicher Wechselbegrenzungen, in einer und der nähmlichen Stelle der Fläche. Wenn sich also zwey Grenzen AB und CD in K (Fig. 6.) wechselseitig begrenzen, so wäre φ die Abweichung der beyden Grenzen KC und KB. Eben so ist φ^{I} die Abweichung der beyden Grenzen KC und KA, und auf eben die Art φ^{II} und φ^{III} die Abweichung der Grenzen KD und KB, und der Grenzen KD und KA.

Anmerkung.

So lange wir in der Mathematik, Alles auf Grenzen und Wechselbegrenzungen und Summen derselben zurückführen; so lange brauchen wir keine Gefahr zu befürchten, daß uns Fragen vorgelegt werden, deren Beantwortungen uns in Verlegenheit setzen können. So bald wir aber heterogene Begriffe einführen, so können wir jener Gefahr gar nicht ausweichen. Der Begriff von Neigung, wie man die Abweichung schlechthin zu nennen pflegt, ist durchaus kein mathematischer Begriff, wenigstens nicht umfassend genug, um Alles das daraus herzuleiten, was daraus hergeleitet werden muß.

5. Grundsatz.

§. 9.

Die beyden partiellen Abweichungen φ^{I} und φ (Fig. 6.) machen die totale Summe aller Wechselbegrenzungen aus, die auf der Fläche nur möglich sind.

Beweis.

Mit der Grenze AB hat jede mögliche Wechselbegrenzung ein Ende, folglich wird nur zwischen diesen drey Grenzen jede Wechselbegrenzung möglich seyn.

Folgerung.

Eine eben solche Summe wird auch φ^{III} und φ^{I} und endlich auch φ und φ^{II} geben. Setzen wir diese Summen $= \Sigma$: so wird man folgende Schlüsse machen dürfen: $\varphi + \varphi^{I} = \Sigma$, $\varphi^{III} + \varphi^{I} = \Sigma$: folglich $\varphi = \varphi^{III}$. Ferner ist $\varphi + \varphi^{II} = \Sigma$ und $\varphi + \varphi^{I} = \Sigma$: folglich $\varphi^{I} = \varphi^{II}$.

Anmerkung.

Man kann sich also die Vorstellung machen, als theilte die Grenze KC oder KD die ganze Summe möglicher Wechselbegrenzungen in zwey Theile. Es wird also auch eine Theilung gedenkbar seyn, welche jene Summe in zwey gleiche Theile theilt, und folglich $\varphi^{I} = \varphi$ und $\varphi^{III} = \varphi^{II}$ wird.

Willkürlicher Satz.

§. 10.

Die Abweichung von zwey Grenzen heißt — ein Winkel.. Ist nun $\varphi = \varphi^{1}$, so heißt jeder von ihnen — ein rechter Winkel. Im andern Falle heißt der größere Theil — ein stumpfer Winkel, der kleinere — ein spitzer Winkel.

6. Grundsatz.

§. 11.

Wenn zwey Grenzen AB und EF (Fig. 7.) sich in B wechselseitig begrenzen, so ist b die Abweichung von bA und EF. Wenn man sich nun außer dem die Fläche in CD bereits begrenzt vorstellt, wodurch dann EF und CD sich in a, CD und AB in c wechselseitig begrenzen werden; so behaupte ich, es wird die Abweichung a kleiner seyn, als die Abweichung b.

Beweis.

Wenn AB und CD sich wechselseitig begrenzen in c, so ist c die Abweichung der Grenzen cA und cC. Gedenkt man sich nun diese Abweichung als einen Theil der Abweichung b, die ich mit b^{11} bezeichnet habe, so wird auch die Abweichung b^{1} = der Abweichung a seyn, denn die Grenze bK ist ja eigentlich die nähmliche Grenze CD, und muß also EF unter eben der Abweichung begrenzen, unter

welcher es von CD geschieht. Nun ist aber $b^{I} = b - b^{II} = a$, folglich kleiner als b.

Anmerkung.

In diesem Beweise ist nichts postulirt, obgleich es auf den ersten Blick so scheinen möchte. Denn daß wir uns die wechselseitige Begrenzung, welche AB und CD in c eingehet, in b vorstellen, ist keine unrechtmäßige Prätension, sondern eine erlaubte Vorstellung, die aus dem Wesen der Grenzen selbst entspringt. Denn wenn die beyden Grenzen CD und EF sich in a wechselseitig begrenzen, und beyde von AB begrenzt werden; so werden sie entweder beyde so begrenzt, daß die Abweichungen $h = h^{I}$ sind, alsdann ist auch $c = c^{I}$ und $b = b^{III}$ (f. §. 9.) und wenn dann $= c$ kleiner als b ist; so wird c immer als ein Theil von b angesehen werden können. Oder es ist h^{I} kleiner als h, alsdann geht es um so viel mehr an.

7. Grundsatz.

§. 12.

Wenn die Grenze EF (Fig. 8.) von zwey Parallelen CD und AB begrenzt wird; so wird die Abweichung d gleich seyn der Abweichung c.

Beweis.

Wenn die Grenzen AB und CD parallel seyn sollen, so würde dieser Bedingung zu

Folge (Fig. 7.) $c = b^{II} = o$ werden müssen, weil bey ihnen keine Wechselbegrenzung, folglich auch keine Abweichung möglich seyn soll. Es würde also auch in dem unmittelbar vorhergegangenen Grundsatze $a = b$ seyn und hier $c = d$ seyn müssen.

Anmerkung.

Das, was ich hier als Grundsatz aufgestellt habe, wird in dem größten Theile der Lehrbücher als Beweis des Parallelolismus aufgestellt, der auch ganz den Charakter der Gründlichkeit hat. —

Folgerung.

Wenn man diesen letzten Grundsatz mit dem des (§. 9.) vereiniget, so wird man folgende Schlüsse machen können. Wenn $d = c$ ist, so wird auch $e = g$ seyn müssen, weil $d + e = \Sigma$ und $c + g$ auch $= \Sigma$ ist. Ferner: daß $e + c\ \Sigma$ ist. Wenn man nun ähnliche Betrachtungen über die Abweichungen a und b anstellt, so wird man gleiche Resultate der Vergleichung erhalten, die sich auch außer dem schon daraus ergeben, weil $a + d$ und $c + b$ beyde $= \Sigma$ sind.

8. Grundsatz.

§. 13.

Die Größe einer Grenze EF (Fig. 9.), die von zwey Parallelen begrenzt wird, hängt

theils von der Summe möglicher Grenzen zwischen den Parallelen AB und CD ab, theils auch von der Differenz $\varphi^1 - \varphi$.

Beweis.

Je kleiner die Differenz $\varphi^1 - \varphi$ wird, je mehr nähert sich die Grenze EF einem Zustande, wo sie weder von AB noch von CD begrenzt werden kann: oder, wo sie ein Glied aus der Summe möglicher Grenzen in X (so werde ich fernerhin jede bestimmte Summe möglicher Grenzen ausdrücken,) wird, wo alsdann, die Summe möglicher Wechselbegrenzungen, oder ihre Größe, nicht mehr bestimmt werden kann. Es wird folglich die Größe der Grenze mit der Zunahme der Differenz $\varphi^1 - \varphi$ auch zunehmen, vorausgesetzt, daß X immer die nähmliche bleibt, und wenn $\varphi = 0$ wird, so ist φ^1 die Summe aller möglichen Wechselbegrenzungen überhaupt, wovon aber keine wirklich ist. Zugleich ist aber auch für jede mögliche Grenze wie 1..2 und 3..4 eine Wechselbegrenzung in EF nothwendig, folglich wird die Größe von EF sowohl von der Summe möglicher Grenzen in X, als auch von der Differenz $\varphi^1 - \varphi$ abhängen.

Folgerung.

Hieraus folgt also nothwendig: wenn $\varphi^1 - \varphi = 0$ ist, so wird die Größe der Grenze

bloß von der Summe möglicher Grenzen in X bestimmt. Umgekehrt kann man auch schließen: jede Grenze, welche von zwey Parallelen so begrenzt wird, daß $\varphi^1 - \varphi = 0$ ist, bestimmt die Summe möglicher Grenzen in X, weil die Summe möglicher Wechselbegrenzungen, d. i., die Größe der Grenze, gleich ist der Summe möglicher Grenzen, d. i., die Größe der Fläche.

Anmerkung.

Jede Grenze also, welche von zwey Parallelen rechtwinkelig begrenzt wird, kann als eine Summe von möglichen Wechselbegrenzungen angesehen werden, deren Summe gleich ist der Summe möglicher Grenzen in X; und wenn diese Begrenzung nicht rechtwinkelig ist, also $\varphi^1 - \varphi$ nicht $= 0$, sondern $= \delta$ ist, so wird freylich für jede mögliche Grenze in X eine Wechselbegrenzung in der Grenze selbst Statt finden müssen; nichts desto weniger aber wird zwischen ihrer absoluten Größe und der Größe, die aus der Summe möglicher Grenzen in X entstehet, und die man ihre relative Größe nennen kann, ein gewisses Verhältniß Statt finden müssen, d. h., es wird für jede Wechselbegrenzung, welche für jede Grenze in X möglich ist, und nicht rechtwinkelig ist, eine gewisse Summe rechtwinkeliger Wechselbegrenzungen möglich seyn.

Willkürlicher Satz.

§. 14.

Eine Begrenzung der Fläche, wie die (Fig. 7.) ist, heißt ein Dreyeck – eine Wechselbegrenzung von drey Grenzen, wodurch Begrenzung der Fläche entstanden ist.

9. Grundsatz.

§. 15.

Wenn in einem Dreyeck, die Winkel welche jedes Paar Grenzen bey ihrer Wechselbegrenzung bilden, alle unter sich gleich sind; so sind auch die Grenzen selbst unter sich gleich.

Beweis.

Es sey ABC (Fig. 10.) ein solches Dreyeck, wie die Bedingung es verlangt. Man gedenke sich die Grenze HI mit der Grenze BC parallel, so wissen wir schon daß der Winkel $\varphi^{I} = \varphi^{II}$ seyn muß. Auf eben die Art ist auch $\varphi = \varphi^{III}$. Nun ist aber der Bedingung nach $\varphi^{II} = \varphi^{III}$, folglich muß $\varphi^{I} = \varphi$ seyn, und $\varphi^{V} = \varphi^{IV}$. (S. §. 12.) Da also die beyden Grenzen AB und AC von zwey Parallelen so begrenzt werden, daß bey beyden die Differenz $\varphi^{V} - \varphi^{I}$ und $\varphi^{IV} - \varphi$ gleich ist; so sind auch bey beyden die Bestimmungen gleich, und folglich AB = AC.

Anmerkung.

Auf gleiche Art kann man den Beweis von einem jeden Paar Grenzen führen, und man wird immer das nähmliche Resultat erhalten.

10. Grundsatz.

§. 16.

In einem jeden Dreyecke sind die Grenzen oder Seiten, wie man zu sagen pflegt, größer oder kleiner in Vergleichung unter einander, je nachdem der ihnen gegenüberstehende Winkel größer oder kleiner ist.

Beweis.

In dem Dreyecke ABC (Fig. 11.) nehme man an, φ sey größer als φ^{I} und nehme IH parallel mit BC an, so wird man Folgendes erhalten: $\varphi > \varphi^{I}$ folglich $\varphi^{II} < \varphi^{III}$ und $\varphi^{V} > \varphi^{IV}$, und folglich $\varphi^{II} - \varphi^{V} < \varphi^{III} - \varphi^{IV}$. (S. §. 13.)

Anmerkung.

Die Eigenschaft, daß φ^{II} größer seyn muß als der Winkel a, ist bereits (§. 11.) gezeigt worden.

11. Grundsatz.

§. 17.

In einem jeden Dreyeck (Fig. 11.) ist $\varphi^{II} = a + \varphi^{I}$.

Beweis.

Man gedenke sich IC mit AB parallel, so wird der Winkel $y = a$ seyn, und $\varphi^{II} - y = \varphi^{I}$ oder $\varphi^{II} - a = \varphi^{I}$, folglich $\varphi^{II} = a + \varphi^{I}$.

Folgerung.

Hieraus folgt, daß die Summe aller drey Abweichungen in einem Dreyeck $= \Sigma$ seyn muß, weil $\varphi^{II} + \varphi = \Sigma$ ist.

12. Grundsatz.

§. 18.

Wenn zwey Grenzen AY und AX, die sich in A (Fig. 12.) wechselseitig begrenzen, von einer andern Grenze DE so begrenzt werden, daß die beyden Abweichungen φ^{I} und φ nicht gleich sind, also $\varphi - \varphi^{I} = x$ ist, so wird die Summe möglicher Wechselbegrenzungen, welche durch die gemeinschaftliche Grenze DE in beyden bestimmt wird, nicht gleich seyn, sondern es wird für die Summe möglicher Wechselbegrenzungen in AD, die ich $= a$ setzen will, eine Summe möglicher Wechselbegrenzungen $= b$ in AE bestimmt werden.

Beweis.

Man gedenke sich HI. mit DE parallel, so wird $\varphi^{I} = e$ und $\varphi = h$ seyn, da nun φ und φ^{I} nicht gleich sind; so wird auch die

Differenz der Abweichungen nicht gleich seyn, die einer jeden Grenze Größe bestimmt. (S. §. 13.)

Folgerung.

Man kann also umgekehrt schließen: wenn zwey Grenzen durch eine gemeinschaftliche Grenze so begrenzt werden sollen, daß für die Größe der einen = a, die der andern = b seyn soll; so muß $\varphi - \varphi^1 = x$ seyn.

Erklärung.

§. 19.

Wenn zwey Grenzen von einer dritten so begrenzt werden, daß φ nicht $= \varphi^1$ ist; so heißt die Vergleichung ihrer Größen — ein **Verhältniß**, und wird gewöhnlich so bezeichnet: $\frac{a}{b} = c$; beydes, so wohl $\frac{a}{b}$ als c, sind gleichbedeutende Ausdrücke. Entweder zeigt man an, wie viel Wechselbegrenzungen in a und b Statt finden, wenn sie von einer Grenze gemeinschaftlich begrenzt werden; oder man zeigt an, wie oft die Summe b in a Statt findet, unter den nähmlichen Bedingungen. Beydes ist eins und das nähmliche.

13. Grundsatz.

§. 20.

Das Verhältniß zweyer Grenzen hängt von der Differenz $\varphi - \varphi^1$ ab.

Beweis.

Jede verschiedene Differenz bestimmt ein verschiedenes Verhältniß, und wird sich folglich mit dieser Differenz selbst ändern.

14. Grundsatz.

§. 21.

Jede Grenze mit ED (Fig. 12.) parallel, wird die Grenzen in dem nähmlichen Verhältniß $= c$ oder $= \frac{a}{b}$ begrenzen. Oder: wenn wir uns die beyden Grenzen AX und AY in einem Zustande x und y begrenzt vorstellen, durch eine Grenze, die mit ED parallel ist, also auch hierbey $\varphi - \varphi^1 = x$ ist; so wird auch hier $\frac{x}{y} = c = \frac{a}{b}$ seyn müssen: nähmlich es werden auch alsdann in x, a Begrenzungen möglich seyn, wenn sie in y, b möglich sind; oder es wird in x die Summe y, c mal möglich seyn.

Beweis.

Wäre dieß nicht der Fall, so müßte auch bey der zweyten Begrenzung $\varphi - \varphi^1 = x^1$ seyn (s. §. 20.); da dieses aber nicht ist, sondern die nähmliche Bedingung des Verhältnisses $= c$ bleibt, so muß auch das nähmliche Verhältniß bleiben.

Erklärung.

§. 22.

Zwey Grenzen, die in jedem beliebigen Zustande unter der nähmlichen Bedingung und folglich in dem nähmlichen Verhältniß begrenzt werden können, haben: ein **constantes oder unveränderliches Verhältniß** gegen einander. Hängt aber das Verhältniß von dem Zustande ab, in welchem sie begrenzt werden, und ändert sich mit ihm, weil sich die Bedingungen ändern; so haben sie: ein **variabeles oder veränderliches Verhältniß** gegen einander.

15. Grundsatz.

§. 23.

Wenn die Grenze AB (Fig. 16) von den beyden Parallelen CD und EF rechtwinkelig begrenzt wird, so ist die Summe möglicher Grenzen, welche die beyden Parallelen bestimmen, so groß, als die Summe möglicher Wechselbegrenzungen, welche die beyden Wechselbegrenzungen in A und B bestimmen.

Beweis.

S. §. 13.

Erklärung.

§. 24.

Jede Grenze, als ein Glied einer bestimmten Summe möglicher Grenzen betrachtet, heißt:

ein Element der Fläche. Jede Wechselbegrenzung, auch als Glied einer bestimmten Summe möglicher Wechselbegrenzungen betrachtet, heißt: ein Element der Grenze.

16. Grundsatz.

§. 25.

Wenn wir uns die Summe von Grenzen in X (Fig. 16.) (s. §. 13.) vollständig vorstellen wollen, so müssen je zwey auf einander folgende mögliche Grenzen als Glieder der Reihe, welche die Summe ausmachen, die Möglichkeit einer dritten Grenze durchaus ausschließen.

Beweis.

So lange zwischen zwey solchen Gliedern ein drittes möglich ist, so lange werden diese beyden Glieder nicht als unmittelbar auf einander folgend, angesehen werden können. Da dieses nun zur Vollständigkeit der Summe unumgänglich nothwendig ist; so folgt: daß nur unter der angegebenen Bedingung die Vollständigkeit der Summe gedacht werden kann.

Anmerkung.

Es ist dieser Grundsatz unter dem Gesetze der Continuität bekannt.

17. Grundsatz.

§. 26.

Die vollständige Summe der Elemente kann nur problematisch, oder der Möglichkeit

nach angegeben werden, und ist keiner Bestimmtheit fähig.

Beweis.

Die Grenzen sind für uns nur als Begrenzungen der Fläche erkennbar, oder als letzte Glieder einer möglichen Summe. Im gegenwärtigen Falle, sollen aber die folgenden Glieder jedes andere mögliche ausschließen: es könnte also, jede folgende Grenze, keine Grenze der Fläche mehr seyn, und folglich nicht erkennbar. Es kann also auch die vollständige Summe der Elemente, nur der Möglichkeit nach, oder problematisch angegeben werden, d. h., wir können nur dieses behaupten: wären wir im Stande, so viele Begrenzungen uns in X vorzustellen, als Grenzen in ihr möglich sind; so könnten wir auch alle möglichen Glieder der Summe angeben. Da dieses aber, vermöge der Bedingung, durchaus unmöglich ist, so müssen wir auch die vollständige Summe nur als möglich angeben.

Anmerkung.

Die vollständige Summe, deren Nothwendigkeit wir anerkennen müssen, sind wir also nicht im Stande, bestimmt angeben zu können. Nichts desto weniger aber können wir nicht, die nothwendige Objectivität, durch unsere beschränkte Subjectivität läugnen. Ich habe mich anderswo ausführlicher über die Me-

taphysik dieses Grundsatzes ausgelassen: hier muß ich mich hart an der Lehre von den Grenzen halten.

Erklärung.

§. 27.

Das, was ich eben von der Größe der Fläche behauptet habe, eben dieses gilt von der Größe der Grenze. Die Wechselbegrenzung, als Glied der Summe betrachtet, ist das Element derselben, deren Vollständigkeit auch aus dem nähmlichen Grunde keiner Bestimmtheit fähig ist.

Willkürlicher Satz.

§. 28.

Man bezeichnet allgemein das Element der Grenze mit d x, und die vollständige Summe mit S.: so daß S. d x die vollständige Summe aller möglichen Wechselbegrenzungen in der bestimmten Größe = x bezeichnen, und S. d x = x ist.

Anmerkung.

S. so wohl, als d x sind für uns unerkennbare Dinge. Ihre Vereinigung aber ist die wahre Bestimmung der Größe, als Summe möglicher Wechselbegrenzungen.

Erklärung.

§. 29.

Das Verhältniß zweyer Größen, das in jedem Zustande der gemeinschaftlichen Begren-

zung, die wir allgemein mit x und y bezeichnen wollen, immer das nähmliche bleibt, können wir nunmehr, folgender Maßen ausdrücken: $\frac{dx}{dy} = c = \frac{a}{b}$. Es hat hier die Bezeichnung eben die Bedeutung, welche wir oben erklärt haben; nähmlich: bey jeder beliebigen Begrenzung y und x, ist in x, c mahl Wechselbegrenzung möglich, wenn in y nur eine möglich ist; oder, in x ist dx, a mahl möglich, wenn dy in y nur b mahl möglich ist.

Anmerkung.

Man pflegt gewöhnlich die Elemente der Größen Differenzialien zu nennen. Das Verhältniß = c heißt alsdann der Differenzial-Coefficient. Ich muß aber bemerklich machen, daß man sich ja hüthen muß, den verschiedenen Bezeichnungen dx und dy auch verschiedene Bedeutungen zu geben.

dx und dy sind in gar nichts verschieden, jede zeigt eine Wechselbegrenzung an, und warum sollten diese verschieden seyn?

Nur in der Vergleichung ihrer Größen, welche aus der gemeinschaftlichen Begrenzung für beyde entsteht, also in Beziehung auf x und y kann man sagen: sie sind verschieden.

Erklärung.

§. 30.

Wenn das Verhältniß = c sich mit dem Zustande der Größe, auf welche Art, ist gleich-

gültig, ändert, also nicht beständig ist; so heißt eine solche Vergleichung der Größen: eine **Function.** Mit der Lehre von den Functionen beschäftigt sich die höhere Geometrie.

Erklärung.

§. 31.

Wenn sich die Grenzen (Fig. 15.) EB, ND und EN, BD, die unter sich parallel sind, rechtwinkelig begrenzen, so heißt eine solche Begrenzung der Fläche — ein **Rectangel.**

Aufgabe.

§. 32.

Man soll die Summe möglicher Grenzen in X angeben, die die Parallelen EB und ND bestimmen?

Auflösung.

Man setze $EN = x = S . dx$ und $EB = y$, so wird, wenn man die Summe selbst $= X$ setzt, $X = S . y . dx$ seyn.

Beweis.

Die Summe möglicher Grenzen in X ist gleich der Summe möglicher Wechselbegrenzungen der nähmlichen Grenze in x. Es wird folglich $y . dx$ ein Glied aus der vollständigen Summe möglicher Grenzen bezeichnen, weil $S . dx$ die Summe dieser Glieder angibt; und folglich $S . y . dx = X$.

Anmerkung.

In dem gegenwärtigen Falle ist y nicht abhängig von dem Zustande, in welchem es begrenzt wird, und bleibt bey jedem dx, das nähmliche: es wird also seyn

$$X = y . S . dx = y . x = EN . EB.$$

Jedes Product von zwey Grenzen, bestimmt also die Größe einer Fläche. Wollte man $CB = S . dy$ setzen; so würde man auf eben die Art erhalten: $X = x . S . dy = EN . EB$. Diese Identität der Resultate, rührt offenbar daher, weil es gleichviel ist, ob ich EN mit den Elementen von EB zähle, wodurch denn X entstehet, oder ob ich EB mit den Elementen von EN zähle, wodurch auch X entsteht. Deutlicher läßt sich dieses folgender Maßen übersehen. Gesetzt es wäre $EF = EN$ (Fig. 15.), so wird seyn $X = EF . EF$; hier ist nun die Identität entschieden. Es sey also $EB = EF + FB$; und $X = EN . EF + EN . BF = EF . EF + EF . BF$. Dieser letzte Theil der Fläche kömmt immer wieder heraus, man mag mit welchen Elementen man will zählen.

18. Grundsatz.

§. 33.

Wenn X und X^1 allgemein zwey Flächen vorstellen, die beyde von Parallelen rechtwinkelig begrenzt werden, und man nimmt an, es

sey $X = ab$ und $X^1 = cd$: ferner, daß $\frac{a}{c} = q$ und $\frac{b}{d} = q^1$ ist, so wird $X : X^1 = q . q^1$ seyn.

Beweis.

$a = c . q$ und $b = q . d$; folglich hat man auch hier $X = q . q^1 . c . d = q . q^1 . X^1$.

Anmerkung.

Man pflegt diesen Grundsatz so auszudrücken: Das Verhältniß der Flächen ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß der Basis und der Höhe: der Grund dieser Zusammensetzung, liegt in dem allgemeinen Beweise, und kann als eine allgemeine Regel, für Vergleichung der Flächen angesehen werden.

Erklärung.

§. 34.

Wir haben oben schon bemerklich gemacht, daß die Größe einer Grenze, welche von zwey Parallelen begrenzt wird, von der Differenz $\varphi - \varphi^1$ abhängig ist. Wenn der Winkel $\varphi^1 = 0$ wird; so kann die Grenze von den beyden Parallelen fernerhin nicht mehr begrenzt werden, und wird wiederum eine unbestimmte Grenze der Fläche werden. Weiter läßt sich hierüber nichts ausmachen.

19. Grundsatz.

§. 35.

Wenn wir uns die beyden Parallelen AF und CE (Fig. 17.), die von den beyden Parallelen AB und HF rechtwinkelig begrenzt werden, zwischen den nähmlichen Parallelen mit abnehmender Differenz $\varphi - \varphi^1$ vorstellen, wie etwa FC und EB: so wird die Größe der Fläche, welche diese beyde Parallelen bestimmen, um so viel kleiner werden, als die Größe der Grenze, größer wird.

Beweis.

Man gedenke sich die Grenze CP, welche die beyden Parallelen FC und EB rechtwinkelig begrenzt, so wird CP, für diesen gegenwärtigen Zustand, die Summe möglicher Grenzen zwischen den Parallelen, selbst seyn (s. §. 13.). Nun ist aber $\frac{EB}{BH} = \frac{CB}{CP}$ (s. §. 21.). Gesetzt nun EB wäre $= x$ und CP $= y$, so sollen x und y, die Größen beyder Grenzen in jedem beliebigen Zustande, vorstellen. Weil aber BH und CB, bey dem veränderlichen Zustande von x und y, immer die nähmlichen bleiben; so wollen wir für sie, die Buchstaben a und b gebrauchen. Man wird also haben: $\frac{x}{a} = \frac{b}{y}$. Gesetzt nun, es wäre für einen bestimmten Fall $\frac{x}{a} = q$: so ist $x = q \cdot a$ und

$y = \frac{b}{q}$, oder mit Worten ausgedrückt: x ist, in Vergleichung seines ersten Zustandes AF, um eben so viel größer geworden, als y in Vergleichung mit seinem ersten Zustande kleiner geworden ist. Dieses läßt sich noch deutlicher übersehen, wenn man $a = b$ setzt, alsdann wird $x = q.a$ und $y = \frac{1}{q}.a$. Als Folgerung aus diesem Grundsatz, kann angesehen werden folgender

20. Grundsatz.

§. 36.

Wenn in den beyden Flächen X und X^1 (Fig. 13.) $CD = EF = AB$ ist, und $X = EA.AB$, und $X^1 = CP.EC$, so ist auch $X = X^1$.

Beweis.

Aus §. 34. folgt: wenn $EC = q.AE$ ist, so ist $CP = \frac{1}{q}.AB$ folglich ist $X^1 = qAE.\frac{1}{q}AB = AE.AB = X$.

Anmerkung.

Der gewöhnliche Beweis für diesen Grundsatz, trägt auch ganz das Gepräge der geometrischen Schärfe, und ich habe nur deßhalb diesen vorgezogen, weil er mir mehr in das

Wesen der Grenzenlehre einzugreifen scheint. Zum Theil aber, läßt sich auch nach diesem Beweise ein Umstand klarer beurtheilen, den Sturm als etwas Unbegreifliches, und Kästner als eine geometrische Merkwürdigkeit angegeben haben. Das Unbegreifliche so wohl, als das Merkwürdige, kann und darf die Geometrie nicht wohl dulden. — Die Sache ist nähmlich diese: der Satz $X = X^1$ (Fig. 13.) ist ohne Ausnahme wahr. Es frägt sich aber nur: was soll man sich alsdann dabey gedenken, wenn CP bis auf ein Element der Grenze abgenommen hat, in welchem Falle EC und FD ein Element der Fläche werden?

Wie kann bey diesem Umstande die Wahrheit des Grundsatzes bestehen? Soll dieser Fall ausgenommen werden? So könnte leicht die Allgemeinheit des Satzes verdächtig werden, wenn man gerade bey der schwierigsten Stelle mit ihm übersetzen müßte. Sollen wir die Wahrheit des Satzes bey diesem Falle glauben, und das Unvermögen unserer Einsichten, mit der Unbegreiflichkeit des Gegenstandes entschuldigen? oder sollen wir lieber mit Kästnern diese Entschuldigung umgehen, und die Wahrheit selbst, als eine mathematische Merkwürdigkeit anstaunen? Im ersten Falle, würden wir die Geometrie zu einer Dogmatik herabwürdigen: im andern, würden wir uns aller geometrischen Autorität begeben. In

solchen mißlichen Lagen, kann nur die Lehre von den Grenzen aushelfen. Wir haben schon mehrere Mahle erinnert, daß jede bestimmte Grenze = x durch S . dx = x ausgedrückt werden kann; wo dx, nichts als eine Wechselbegrenzung bedeutet, deren unbestimmbare Summe in x selbst, durch S. angezeigt wird. Im gegenwärtigen Falle nun, soll CP bis auf ein Element der Grenze abnehmen; alsdann aber, wird dieses Element kein Element einer bestimmten Grenze = x seyn, sondern ein Element schlechthin, das zu keiner bestimmten Grenze gehöret. Eben so auch wird in diesem Falle, FD oder EC eine unbestimmbare Summe von möglichen Wechselbegrenzungen seyn, deren Unbestimmbarkeit aber, als absolut angesehen werden kann, weil sie sich auf keine bestimmte Grenze beziehet.

Wenn also CP bis auf ein Element abnimmt, und folglich FD eine unbegrenzte Grenze wird; so kann das Product FD . CP jede bestimmte Größe bedeuten; denn dieses Product, in dem angegebenen Falle, ist der allgemeinste Ausdruck der Größe. Das Product FD . CP im gegenwärtigen Falle unterscheidet sich also von dem Producte S . dx nur darin, daß S . dx nur = x seyn kann; dahingegen können wir uns jede Größe unter dem Ausdruck FD . CP vorstellen; folglich auch hier die Größe X = X = x, y.

Erklärung.

§. 37.

Wir haben jede bestimmte Fläche, durch den Ausdruck S. y. dx, dargestellt. Ist nun in der Summe S. die Grenze y eine unveränderliche Größe, so wird die Größe der Fläche, leicht angegeben werden können; setzt man nähmlich die unveränderliche Grenze = c, so wird die Fläche selbst seyn = cx, wie wir bereits angegeben haben. Wenn hingegen y eine veränderliche Grenze ist, und etwa von dem Zustande abhängt, in welchem wir uns x begrenzt vorstellen; so muß in dem allgemeinen Ausdruck: S. y dx, y nach einer Regel bestimmt werden, die diese Abhängigkeit angibt, und alsdann ist die Bestimmung der Größe der Fläche, mit mehreren Schwierigkeiten verknüpft, zu deren Erörterung ein anderer Ort angewiesen werden muß; es kann also hier die Möglichkeit nur gezeigt werden.

Aufgabe.

§. 38.

Die beyden Grenzen AB und BC (Fig. 14.) sollen in B sich rechtwinklicht wechselseitig begrenzen, und beyde von der Grenze AC begrenzt werden, man soll die Größe dieser solcher Gestalt begrenzten Fläche angeben?

Auflösung.

Es sey AB = a und BC = b, ferner mag EF = y und AE = x seyn, so ist a:b = x:y und folglich $y = \frac{bx}{a}$. Also das Element dieser Fläche $\frac{bx.dx}{a}$ und die Fläche selbst: $S.\frac{bx.dx}{a}$, dieses ist, nach festgesetzten Regeln, $\frac{bx^2}{2a}$. Für x = a ist die Größe der ganzen Fläche $= \frac{ba}{2}$.

Folgerung.

Es verhält sich also die Größe dieser Fläche, zu der (Fig. 13.), wenn in beyden b und a gleich ist, wie 1:2.

Anmerkung.

Der Grundsatz des §. 36. gilt also auch für die Begrenzung (Fig. 14.), weil diese auf jene zurückgeführt werden kann.

Die Lehre vom Kreise.

§. 39.

21. Grundsatz.

Wenn die Grenze ah (Fig. 18.) von den beyden Parallelen CD und AB rechtwinklicht begrenzt wird, und man gedenkt sich die Grenze

hi von der EB^1 rechtwinklicht begrenzt, solcher Gestalt aber, daß hc = ah ist, so wird 1) der Winkel δ = W. β seyn; und 2) wird auch ab = bc seyn.

Beweis.

Man gedenke sich NM mit EB^1 parallel, so wird sie auch hi rechtwinklicht begrenzen (s. §. 12.). Nun ist aber W. β = W. ν. Ferner ist W. δ = W. φ. Es ist aber W. φ = W. ν: folglich ist W. δ = W. β. 2) Gedenkt man sich nun noch die Grenze ac, so erhält man zwey Dreyecke ahb und abc, in denen zwey Winkel gleich sind. (S. §. 15.)

22. Grundsatz.

§. 40.

Die Summe aller möglichen Wechselbegrenzungen bey einer bestimmten Abweichung, sind eben so wenig bestimmbar, als bey einer bestimmten Grenze.

Beweis.

Sollten alle mögliche Wechselbegrenzungen angegeben werden können; so müßte man auch alle möglichen Grenzen angeben können, von welchen die Wechselbegrenzungen herrühren. Da dieses nun nicht möglich ist, so ist auch jenes nicht möglich.

Erklärung.

§. 41.

Unter elementarische Abweichung verstehe ich, diejenige wechselseitige Begrenzung zweyer Grenzen, die jede mögliche dritte ausschließen.

Erklärung.

§. 42.

Wenn AB und BC (Fig. 19.) die Abweichung φ haben, und man gedenkt sich beyde durch AC etwa so begrenzt, daß in A ein rechter Winkel ist; so verstehe ich unter relative Größe der Grenze AC, diejenige Summe möglicher Wechselbegrenzungen, welche diejenigen Grenzen mit ihr eingehen, die sich in B wechselseitig begrenzen können. Unter absoluter Größe der nähmlichen Grenze verstehe ich, diejenige Summe von Wechselbegrenzungen, die ihre Größe wirklich angibt, also durch rechtwinklichte Parallele.

Erklärung.

§. 43.

Wenn wir die Größe der Grenze AC (Fig. 19.) = S setzen, und die Abweichung der beyden Grenzen AB und BC = φ; so drückt der Differenzial-Coefficient $\frac{ds}{d\varphi} = x$ irgend ein Verhältniß aus zwischen den möglichen Wechselbegrenzungen in φ und denen

ich s, oder zwischen der relativen und absoluten Größe von s.

23. Grundsatz.

§. 44.

Das Verhältniß $\frac{ds}{d\varphi} = x$ ändert sich in eben dem Verhältniß, in welchem sich der Zustand der Grenzen AB und CB ändert, welche von AC begrenzt werden.

Beweis.

Es sey ac (Fig. 19.) mit AC parallel; die Größe derselben $= z$. Ferner sey $\frac{s}{\varphi} = x$ und $\frac{z}{\varphi} = x^I$, setzt man nun $AB = r$ und $aB = r^I$, so hat man
$z : s = r : r^I = x\varphi : x^I\varphi = x : x^I$.

Folgerung.

Aus diesem Grundsatz folgt also, daß das Verhältniß der relativen Größe zur absoluten lediglich von der Größe AB oder BC abhängt. Setzt man also allgemein $AB = r$, und bezeichnet die Abhängigkeit mit (f.), so wird man haben $\frac{ds}{d\varphi} = (f.) . r$.

Erklärung.

§. 45.

Es sey φ eine elementarische Abweichung der beyden Grenzen AB und BC (Fig. 20.).

Man denke sich, daß AC von ab so begrenzt werde, daß $\varphi = x$ ist, also $Ac = cd$ und $AB = Bd$ (§. 39.). Auf diese Art, wird jede von den beyden Grenzen AB und Bd, von gleichen Grenzen rechtwinklicht begrenzt werden. Wenn man nun fortfährt, eines jeden Paar Grenzen elementarische Abweichungen, die nur auf der Fläche möglich sind, nach der angegebenen Regel zu begrenzen, so wird man eine Begrenzung der Fläche erhalten, wie sie (Fig. 21.) darstellt, und diese Begrenzung heißt — **ein Kreis.**

Erklärung.

§. 46.

Die relative Größe des Kreises, ist diejenige Summe von Wechselbegrenzungen, welche diejenigen Grenzen im Kreise eingehen, die sich alle in C (Fig. 21.) wechselseitig begrenzen. Die absolute Größe des Kreises ist diejenige Summe von Wechselbegrenzungen, die überhaupt in ihm möglich sind.

Erklärung.

§. 47.

Wenn ds, ein Element aus der absoluten Größe irgend eines Kreises vorstellt, und $d\varphi$ ein Element aus der relativen Größe desselben; so wird auch bey dem Kreise das Verhältniß der relativen Größe zur absoluten, allgemein durch $\frac{ds}{d\varphi} = (f.)\,r$ ausgedrückt werden können:

denn, bey jeder Begrenzung für $d\varphi$, finden die obigen Betrachtungen Statt. Da nun für jedes $d\varphi$, die Begrenzungen im Kreise alle gleich sind: so gilt der Ausdruck allgemein.

Erklärung.

§. 48.

Unter Krümmung eines Kreises oder Grad der Krümmung verstehet man: das verschiedene Verhältniß der relativen Größe zur absoluten desselben, und kann folglich bey jedem bestimmten Kreise durch $\frac{ds}{d\varphi} = r$ angegeben werden. Man sagt: ein Kreis krümmt sich mehr oder weniger, je kleiner oder größer der Differenzial-Coeffieient $= r$ ist; der Sinn davon ist dieser: Wenn in einem Kreise $\frac{ds}{d\varphi} = r$ ist; also für jedes $d\varphi$, $r$mahl ds möglich ist; und in einem anderen Kreise $\frac{dS}{d\varphi} = R$ ist, also für jedes $d\varphi$, Rmahl dS möglich, also das Verhältniß ihrer absoluten Größen $R : r = q$ ist, so ist doch wohl offenbar, daß die elementarische Abweichung der beyden Grenzen AY und IY (Fig. 22.), in dem Kreise für $= R$, nicht so merklich ist, als eben diese elementarische Abweichung der Grenzen CX und XN, in dem Kreise für $= r$, weil die Verweilung in der Grenze AY,

gleichsam von längerer Dauer ist, als in CX. Diese Verweilung aber, wird von dem Coefficienten $\frac{ds}{d\varphi} = (f.)r$ bestimmt: daher behauptet man mit Recht: die Krümmung des Kreises hängt von dem Verhältniß $\frac{ds}{d\varphi} = (f.)\,r$ ab.

Anmerkung.

Weiter darf ich in dieser Theorie nicht gehen, so viel weiß ich aber gewiß, daß, wer sich von diesen Gründen mit absoluter Gewißheit überzeugt hat, der wird auch sehr leicht alles das begreifen können, was die höhere Geometrie davon handelt.

Erklärung.

§. 49.

Wir haben bereits mehrere Mahle Erwähnung gethan, daß die Größe einer bestimmten Grenze, die Summe von möglichen Wechselbegrenzungen ist, in welcher jede zwey unmittelbar auf einander folgende Wechselbegrenzungen, die Möglichkeit einer dritten durchaus ausschließen. Wenn daher eine Grenze, von zwey Parallelen rechtwinklicht begrenzt wird; so ist die Größe dieser Grenze, die Summe aller möglichen Wechselbegrenzungen, welche die Parallele mit der Grenze selbst eingehen können, und jeder andern Grenze Größe, welche von den nähmlichen Parallelen bestimmt wird, aber

nicht rechtwinklicht sind, hat ein bestimmtes Verhältniß zu der ersteren. Hieraus ergibt sich also folgender

24. Grundsatz.

§. 50.

Es gibt gar keine Vorstellung, durch welche wir uns den Kreis als eine Summe von Wechselbegrenzungen vorstellen könnten, in welcher, je zwey unmittelbar auf einander folgende Wechselbegrenzungen, die dritte ausschließen.

Beweis.

Es gibt nur zwey Vorstellungen, sich den Kreis, als eine Größe schlechthin zu gedenken. Entweder, stellen wir uns ihn als eine Summe solcher möglichen Wechselbegrenzungen vor, die wir oben relativ benannt haben: oder, stellen wir uns ihn als eine Summe von Wechselbegrenzungen vor, welche durch Parallelen entstehen. Im ersten Falle, würden wir bloß die relative Größe des Kreises erhalten. Im andern Falle, würden wir sogar etwas Unmögliches übernehmen. Denn da der Kreis ein Zusammenhang von Grenzen ist, die alle eine Abweichung gegen einander haben; so ist auch an rechtwinklichte Wechselbegrenzung von Parallelen nicht zu gedenken.

Anmerkung.

Man sagt daher, die Größe des Kreises sey für uns — transcendent, d. h., nicht meß-

bar. Nichts desto weniger hat man eine Methode angegeben, wodurch es möglich wäre, die Größe des Kreises zu bestimmen, wenn wir überhaupt im Stande wären, Größen nach ihren Elementen zu zählen; denn diese Methode geht eigentlich darauf hinaus, die Summe der Elemente im Kreise zu bestimmen, dessen Unmöglichkeit aus §. 26.) erhellet.

Erklärung.

§. 51.

Die Größen Bestimmung des Kreises heißt — die **Quadratur** desselben, und wir werden sie fernerhin mit π bezeichnen. Das Verhältniß der verschiedenen Kreise folgt aus (§. 44.).

Erklärung.

§. 52.

Diejenige Stelle im Kreise, wo alle mögliche Wechselbegrenzungen vorgehen sollen, heißt — der **Mittelpunct des Kreises.**

25. Grundsatz.

§. 53.

Alle Grenzen, die sich in dem Mittelpunct wechselseitig begrenzen können, und zugleich von dem Kreise selbst begrenzt werden, sind gleich.

Beweis.

Die Gleichheit der Grenzen ist Bedingung der Construction, und muß also, nach vollendeter Construction, Statt finden.

Willkürlicher Satz.

§. 54.

Grenzen, die sich im Mittelpunct wechselseitig begrenzen, heißen — Durchmesser des Kreises, und die Hälfte derselben — Halbmesser des Kreises.

Erklärung.

§. 55.

Diejenigen Grenzen, welche jeden möglichen Halbmesser rechtwinklicht begrenzen, heißen — Tangenten des Kreises. Es sind diejenigen Grenzen, zu welchen die relativen Elemente des Kreises gehören.

26. Grundsatz.

§. 56.

Für jeden möglichen Halbmesser gibt es nur eine mögliche Tangente.

Beweis.

Es folgt dieser Grundsatz aus den Bedingungen der Construction des Kreises.

27. Grundsatz.

§. 57.

Die Abweichung der Tangenten ist gleich der Abweichung der Halbmesser, zu welchen die Tangenten gehören.

Beweis.

Es folgt auch dieser Grundsatz aus den Bedingungen der Construction des Kreises.

28. Grundsatz.

§. 58.

Für jede Tangente, gibt es eine andere, welche mit dieser parallel ist.

Beweis.

Jeder Diameter kann von zwey Tangenten rechtwinklicht begrenzt werden, und folglich parallel.

29. Grundsatz.

§. 59.

Wenn DM (Fig. 23.) der Durchmesser des Kreises ADZM ist, so wird jede Grenze innerhalb des Kreises mit DM parallel, desto kleiner seyn; je kleiner die Abweichung der Tangenten seyn werden, welche diese Grenze innerhalb des Kreises begrenzen.

Beweis.

Wenn man sich bey einer jeden solchen Grenze, wie EN, die Tangenten rechtwinklicht begrenzt vorstellt; so wird diese Grenze immer kleineren Winkeln opponiren, je kleiner die Abweichung ist, und alsdann folgt der Beweis schon aus (§. 16.).

Folgerung.

Wenn daher die Abweichung der Tangenten für eben diese Grenze, das Maximum erreicht hat, so muß diese Grenze auch die größte seyn; und dieses wäre alsdann, wenn DM der Durchmesser selbst ist. Der Diameter ist also die größte Grenze innerhalb des Kreises.

30. Grundsatz.

§. 60.

Nur die Tangenten begrenzen den Halbmesser als solchen, jede andere Grenze im Kreise wird ihn früher begrenzen.

Beweis.

Es folgt dieses schon aus der Construction des Kreises; denn die Tangenten sind diejenigen Grenzen, mit welchen wir den Halbmesser begrenzt haben. Gedenkt man sich aber die Grenze EN (Fig. 23.) innerhalb des Kreises, so muß sie offenbar entweder zwischen den Parallelen DM und AB gedacht werden, welche den Halbmesser wirklich als solchen begrenzen, oder sie muß die Tangente AB, oder der Diameter DM selbst seyn: im ersten Falle wird sie ihn früher begrenzen; in den beyden letztern aber, wird sie ihn als solchen begrenzen.

Willkürlicher Satz.

§. 61.

Jede Grenze innerhalb des Kreises heißt — eine **Sehne des Kreises.**

31. Grundsatz.

§. 62.

Jede Sehne ist kleiner, als der Bogen, von welchem sie begrenzt wird.

Beweis.

FT (Fig. 24.) sey eine solche Sehne. Man denke sich selbige von den Parallelen a.1, a^{I}.2, a^{II}.3 rechtwinklicht begrenzt. Gedenkt man sich nun an einer jeden von diesen Parallelen eine Tangente; so wird offenbar jede dieser Parallelen, die Sehne und die Tangente in irgend einem Verhältniß = q begrenzen, oder es wird bey dieser Begrenzung der Sehne und der Tangente in der Tangente q mahl Wechselbegrenzungen möglich seyn, wenn in der Sehne nur eine möglich ist (s. §. 16. und §. 19.). Da nun der Kreis aus Theilen bestehet, welche zugleich Theile dieser Tangenten sind; so muß dieses auch für den Theil des Kreises Statt finden, der diese Sehne begrenzt.

Anmerkung.

Dieses Verhältniß wird immer mehr und mehr abnehmen, je mehr die Grenzen a.1 und a.2 Tangenten begrenzen werden, welche sich dem Parallelolismus mit FT immer mehr nähern. Da, wo die parallele Tangente EH mit FT begrenzt wird, wird auch das Verhältniß = q aufhören, weil in diesem Falle zwey Parallelen rechtwinklicht begrenzt werden.

Erklärung.

§. 63.

Wenn DN (Fig. 24.) eine Tangente des Kreises ist, und man denkt sich selbige von CN begrenzt, so heißt DN — eine Sehne außerhalb des Kreises, die zu dem Theile des Kreises DM gehöret.

32. Grundsatz.

§. 64.

Jede Sehne außerhalb des Kreises ist größer als der dazu gehörige Theil des Kreises.

Beweis.

Man gedenke sich an M (Fig. 24.) eine Tangente, so wird CN die Tangente rechtwinklicht begrenzen; die Sehne DN hingegen unter der Abweichung $= \varphi$. Es werden also auch hier die Tangenten RM und der Theil der Sehne RN in einem Verhältniß $= q^1$ von CN begrenzt werden. Da nun auch hier die nähmliche Vorstellung bey jeder Begrenzung Statt finden muß; so folgt, daß die Sehne außerhalb des Kreises größer seyn muß, als der dazu gehörige Theil des Kreises.

Anmerkung.

Da bey der Sehne außerhalb des Kreises der umgekehrte Fall ist, als bey der Sehne innerhalb des Kreises, so wird auch hier das Verhältniß $= q^1$ immer zunehmen müssen,

bis CN mit DM parallel ist, alsdann wird das Verhältniß unbestimmbar seyn, weil in diesem Falle DN von CN nicht begrenzt werden kann, und folglich selbst unbestimmbar seyn wird.

Erklärung.

§. 65.

Kreise deren Tangenten durch gemeinschaftliche Halbmesser rechtwinklicht begrenzt werden können, heißen — concentrische Kreise (Fig. 25.).

33. Grundsatz.

§. 66.

In concentrischen Kreisen sind die Tangenten parallel, welche gleiche Abweichung haben.

Beweis.

Wenn ihre Abweichungen gleich sind, so wird jedes Paar Tangenten durch einen gemeinschaftlichen Halbmesser rechtwinklicht begrenzt werden können, und folglich parallel seyn.

34. Grundsatz.

§. 67.

Concentrische Kreise können sich nie wechselseitig begrenzen.

Beweis.

(Fig. 25.) mag zwey concentrische Kreise vorstellen; so gibt es für jedes Paar Tangen-

ten, welches irgend eine Abweichung $= \varphi$ hat, in dem Kreise (2) ein Paar Tangenten mit eben der Abweichung $= \varphi$ in dem Kreise (1), welche unter sich parallel sind. Wenn sich aber zwey Kreise wechselseitig begrenzen sollen, so müssen dieß doch eigentlich die Tangenten thun, und alsdann würde dieser Fall die angegebene Bedingung der Concentricität aufheben.

35. Grundsatz.

§. 68.

Kreise, die sich wechselseitig begrenzen, können nur eine Tangente haben, welche durch eine gemeinschaftliche Grenze rechtwinklicht begrenzt wird.

Beweis.

In der Grenze Ic (Fig. 26.) kann man nach Willkür zwey Stellen annehmen, welche die Mittelpuncte der zu construirenden Kreise seyn sollen; so wird die erste rechtwinklichte Begrenzung ihrer Tangenten, durch eine und die nähmliche Grenze Ic, geschehen können, und die ersten Tangenten derselben, werden die Parallelen IK und Rf seyn. Wenn also IK und Rf die ersten Tangenten der nicht concentrisch zu construirenden Kreise sind, so können sie beyde, durch eine gemeinschaftliche Grenze rechtwinklicht begrenzt werden. Dieses kann aber auch nur im Anfange der Construction Statt finden, weil es alsdann noch

in unserer Willkür stehet, ob wir sie concentrisch construiren wollen, oder nicht, und erst bey der ersten elementarischen Abweichung der Tangenten, ist es bestimmt, ob sie concentrisch seyn sollen, oder nicht.

Folgerung.

In der Grenze Io, sind also auch beyder Kreise Durchmesser enthalten; man sagt daher: diejenige Grenze, welche beyde Kreise in zwey gleiche Hälften theilt, gehet durch beyder Kreise Mittelpunct.

36. Grundsatz.

§. 69.

Die wechselseitige Begrenzung der Kreise, muß nothwendig zwey Mahl vorgehen.

Beweis.

Gesetzt es wären RF und R^1f (Fig. 26.) zwey parallele Tangenten in den Kreisen (2) und (1), so haben offenbar diejenigen Tangenten AB und ab, welche sich wechselseitig begrenzen sollen, jede gegen die parallelen, eine bestimmte Abweichung, die vermöge der Construction, in dem Kreise selbst, zwey Mahl vorkommen muß.

Erklärung.

§. 70.

Die Benennung der Concentricität, rührt von der Gemeinschaft des Mittelpuncts her,

und man kann daher auch diejenigen Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, allgemein excentrische Kreise nennen; ob sie sich wechselseitig begrenzen, wie (Fig. 26.), oder einer den anderen einschließen, wie (Fig. 27.), dieses macht keinen wesentlichen Unterschied.

Erklärung.

§. 71.

Kreise, die eine Tangente gemeinschaftlich haben, heißen — sich berührende Kreise; ob übrigens die Berührung von außen geschieht, wie (Fig. 29.), oder von innen, wie (Fig. 28.), ist ganz einerley.

Anmerkung.

Auch die berührenden Kreise, gehören unter die Rubrik der excentrischen, und ich will nur noch ein Paar Worte von ihnen sprechen, weil einer unserer großen deutschen Geometern, bey dieser Gelegenheit, sich von einer optischen Täuschung hat irre führen lassen. Er hat nähmlich geglaubt, aus dem Umstande, daß Kreise sich von innen berühren können, den Schluß wagen zu dürfen: der Berührungs-Winkel, welchen der Kreis (1) mit der Tangente AK macht (Fig. 28.), müßte größer seyn, als der, welchen der Kreis (2) mit der nähmlichen Tangente macht. Aus welchem Grunde? Weil es sonst unbegreiflich

wäre, wie der Kreis (2) durch den Kreis (1) und die gemeinschaftliche Tangente durchgehen könnte. Da sey Gott für! Jeder Kreis macht mit seiner Tangente, eine und die nähmliche elementarische Abweichung = dφ, und das verschiedentliche Verhältniß der Halbmesser der Kreise bestimmt freylich das Verhältniß ihrer absoluten Größen; die relative derselben hingegen bleibt in allen die nähmliche, wie wir oben gesehen haben. Der Berührungs-Winkel, oder die erste Abweichung der Tangenten, ist in dem Kreise (1) nicht größer, als in dem Kreise (2), und allen möglichen Kreisen überhaupt gleich. Daß aber der Kreis (2) zwischen dem Kreise (1) und der gemeinschaftlichen Tangente hindurch gehet, davon ist der Grund der: weil der Kreis (1) einen größeren Krümmungsgrad hat, als der Kreis (2), und wenn man sich beyde Kreise, durch irgend eine gemeinschaftliche Grenze begrenzt vorstellt, so hat der kleinere Kreis (1) von der gemeinschaftlichen Tangente AK an, bis zur angenommenen Grenze, gleichsam mehr Abweichungen durchgangen, als der größere Kreis (2), daher denn auch die Abweichung der Tangente an der angenommenen begrenzten Stelle mit der Tangente AK in dem Kreise (1) größer seyn muß, als in dem Kreise (2): und daher auch der Durchgang des Kreises (2) zwischen dem Kreise (1) und der gemeinschaftlichen Tangente.

Die ebene Trigonometrie.

Erklärung.

§. 72.

Wir haben bisher jede Abweichung von zwey sich wechselseitig begrenzenden Grenzen so angegeben, daß sie eine Summe möglicher Wechselbegrenzungen in einer und der nähmlichen Stelle ist. Wir haben uns mit dieser Vorstellung begnügen können, weil es uns bloß darum zu thun war, diejenige Grenze zu finden, welche alle mögliche Wechselbegrenzungen darstellt. Wir haben gezeigt, daß diese Grenze **der Kreis** ist. Nunmehr aber wollen wir die Abweichung von zwey Grenzen als eine **Gradbestimmung ihrer möglichen Wechselbegrenzung überhaupt**, betrachten, solcher Gestalt, daß auch gegenwärtig jede Abweichung, eine Summe möglicher Wechselbegrenzungen darstellt, aber in Beziehung auf den Grad ihrer möglichen Wechselbegrenzung.

37. Grundsatz.

§. 73.

Die rechtwinklichte Wechselbegrenzung, ist in Beziehung auf den Grad möglicher Wechselbegrenzung überhaupt, **das Maximum desselben.**

Beweis.

Wir haben oben gezeigt, daß, je größer die Differenz $\varphi - \varphi^1$ (Fig. 30.) wird, je mehr

nähert sich die Grenze einem Zustande, wo fernerhin keine Wechselbegrenzung mehr möglich ist. Nun bleibt aber bey dieser Annäherung beständig $\varphi = \varphi^{II}$; folglich wird dieses auch für die beyden Abweichungen φ^{I} und φ^{II} gelten müssen; wo also diese Differenz $= 0$ wird, ist das **Maximum möglicher Wechselbegrenzung**, und bey jeder Differenz dieser Abweichung, befindet sich die Grenze, dem Zustande unmöglicher Wechselbegrenzung schon näher.

Erklärung.

§. 74.

Eine Größe = B heißt, in Vergleichung mit einer andern Größe = A, negativ, wenn sie eine frühere Begrenzung in A anzeigt; so daß wir uns die Größe = A in einem Zustande vorstellen müssen, wo ihre Summe von Gliedern, welche ihre Größe constituirt, um die Summe = B **früher** bestimmt wird, als in der Größe = A selbst. B ist also eine Größe, welche wir uns in A nicht gedenken sollen, und heißt daher mit Recht, eine **verneinende oder negative Größe**. Man bezeichnet sie mit — B.

Erklärung.

§. 75.

Eine Größe hängt von einer andern Größe ab, oder ist eine **Function** derselben, wenn der Zustand der einen, den der andern be-

stimmt; die Bestimmung selbst, ist positiv oder negativ, je nachdem es die Größe ist, von welcher sie abhängt.

38. Grundsatz.

§. 76.

Wenn eine Größe von dem Grade möglicher Wechselbegrenzung zweyer Grenzen abhängt, wie etwa AC und NC (Fig. 31.) sind, und ACE das Maximum derselben ist; so ist das Gesetz der Function folgendes: die Abweichungen a und b bestimmen positiv, und sind folglich positive Größen: die Abweichung = c hingegen bestimmt negativ, und ist folglich eine negative Größe: dahingegen bestimmt die Abweichung = d wieder positiv, und ist eine positive Größe. Ferner bestimmen die Abweichungen = h und = g beyde negativ, und sind beyde negative Größen. Dahingegen bestimmen aber die Abweichungen = f und = e, die erstere positiv, die andere negativ; die erstere ist daher eine positive, die andere eine negative Größe.

Beweis.

Von den beyden Abweichungen a und b, zeigt die erstere an, wie viel sich die Wechselbegrenzung, dem Maximum bereits genähert hat, und die andere, wie viel sie sich noch zu nähern hat; also beyde positiv. Von den

beyden Abweichungen c und d, zeigt die erstere an, um wie viel sich die Wechselbegrenzung bereits dem Zustande der unmöglichen Wechselbegrenzung genähert hat, und die andere zeigt an, wie viel noch von möglicher Wechselbegrenzung vorhanden ist, folglich die erstere negativ, und die andere positiv. Die beyden Abweichungen h und g bestimmen beyde, eine unmögliche Wechselbegrenzung, in Beziehung auf die von uns angenommene, sind folglich beyde negativ. CB und CH bestimmen auch ein Maximum der unmöglichen Wechselbegrenzung, folglich ein negatives Maximum. Von den beyden Abweichungen f und e, bestimmt die erstere, um wie viel sich die Wechselbegrenzung von dem negativen Maximum entfernt hat, und sich der möglichen Wechseibegrenzung genähert hat; die andere hingegen, wie viel von der unmöglichen Wechselbegrenzung noch vorhanden ist, folglich die erstere positiv die andere negativ.

Anmerkung.

So wie wir das Gesetz der Fuction bewiesen haben, kann die Einsicht desselben nicht sehr viele Schwierigkeiten haben; denn die Homogenität und Heterogenität der Winkel ergibt sich fast von selbst, wenn man sie auf den Grad möglicher Wechselbegrenzung beziehet, oder wenn man sie als ein Maß des Grades betrachtet.

Erklärung.

§. 77.

Wir haben oben schon bemerklich gemacht, wie die Größe einer Grenze von der Abweichung abhängt, die ihr opponirt. Ein Verhältniß, welches die Abhängigkeit der Größe der Grenze von jeder beliebigen Abweichung bestimmt, heißt — eine **trigonometrische Function.**

39. Grundsatz.

§. 78.

In dem Kreise (Fig. 32.) bestimmt das veränderliche Verhältniß der beyden Grenzen ED:CD die veränderliche Abhängigkeit der Grenze DE von der Abweichung.

Beweis.

Mit der Abweichung wächst DE und CD bleibt unveränderlich, folglich, wird das Verhältniß sich immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, und bey dem Maximum der Abweichung, wird CD = DE gleich seyn, und auch das Maximum erreicht haben.

Erklärung.

§. 79.

Man nennt das zu jeder Abweichung gehörige Verhältniß: den **Sinus des Winkels,** und wenn man unter φ jede Abweichung versteht; so ist sin. φ das zu φ gehörige Verhältniß.

40. Grundsatz.

§. 80.

Wenn für jede Abweichung $= \varphi$ das Verhältniß $\sin. \varphi$ bestimmt ist; so ist man im Stande gesetzt, die Größe einer jeden andern rechtwinklichten Begrenzung, bey eben der Abweichung φ, bestimmen zu können.

Beweis.

Denn es ist (Fig. 33.) $CD : DE = CG : AG$, also $AG = CG . \sin. \varphi$.

Willkürlicher Satz.

§. 81.

Wenn (Fig. 33.) DE der Sinus der Abweichung $= a$ ist, so heißt DK, als der Sinus der Abweichung $= b$, der Cosinus der Abweichung $= a$, oder Cosin. a.

Erklärung.

§. 82.

Wenn wir den Grad möglicher Wechselbegrenzung, durch Sinus und Cosinus ausdrükken, so wird eben das Gesetz für die trigonometrische Functionen Statt finden müssen, welches wir oben, bey der Homogenität und Heterogenität der Abweichungen festgesetzt haben. Nähmlich: $\sin a$ und $\text{Cosin.} a = \sin. b$, beyde positiv. Ferner $\sin. d$ und $\text{Cosin.} d = \sin. c$, der erstere positiv und der andere negativ. Ferner $\sin. h$ und $\text{Cosin.} h = \sin. g$, beyde

negativ. Eben so wird seyn sin. e und cosin. e = sin. f, der erstere negativ und der andere positiv.

Anmerkung.

Das Princip, nach welchem wir, die Homogenität und Heterogenität der trigonometrischen Functionen, beurtheilen müssen, wäre also kürzlich — dieses: wenn eine Größe, von dem Grade möglicher Wechselbegrenzungen zweyer Grenzen abhängt; so bestimmt sin. φ, die wirkliche Abweichung dieser beyden Grenzen, und cosin. φ, die mögliche Abweichung bis zum Maximum derselben. Wenn also sin. φ das Maximum bestimmt, so muß nothwendig cosin. $\varphi = 0$ geworden seyn. Bezeichnet man nun, die trigonometrische Functionen über das Maximum hinaus, mit sin. φ^{I} und cosin. φ^{I}; so bestimmt sin. φ^{I}, wie viel mögliche Abweichung überhaupt noch da ist, und cosin. φ^{I} bestimmt, die Entfernung von dem Maximum, oder die Annäherung zu einem Zustande, wo Wechselbegrenzung, und also auch Abweichung, gar nicht mehr möglich ist.

Wenn also cosin. φ^{I} das Maximum der Entfernung bestimmt, so muß sin. $\varphi^{I} = 0$ geworden seyn. Nennt man die trigonometrische Functionen, die nach diesem die Abweichungen bestimmen, sin. φ^{II} und cosin. φ^{II}; so werden sie beyde, eine Entfernung von möglicher Wechselbegrenzung bestimmen, nähmlich

in Beziehung, auf die von uns angenommenen, und ihre Abhängigkeit unter einander, wird die nähmliche seyn, als bey sin. φ und cos. φ; nähmlich, wenn sin. φ^{II} das Maximum bestimmt, muß cosin. $\varphi^{II} = 0$ geworden seyn. Nennt man fernerhin die Abweichung, sin. φ^{III} und cos. φ^{III}, so werden sie wiederum heterogene Bestimmungen erhalten, wie bey sin. φ^{II} und cosin. φ^{II}, nur mit dem Unterschiede, daß hier cos. φ^{III} positiv ist, weil er die Entfernung vom negativen Maximum bestimmt, oder die Annäherung zum positiven; sin. φ^{III} hingegen ist negativ, er bestimmt, wie viel von negativer Abweichung noch vorhanden ist. Ihre Abhängigkeit unter einander, ist übrigens, wie bey sin. φ^{II} und cos. φ^{II}.

Erklärung.
§. 83.

Wir haben bisher eine Function betrachtet, die in dem Grade möglicher Wechselbegrenzung zweyer Grenzen bestehet. Nunmehr wollen wir eine Function betrachten, die in dem Grade möglicher Parallelosirung zweyer Grenzen bestehet, und wo der Parallelolismus das Maximum derselben ist.

41. Grundsatz.
§. 84.

Eine Function, welche in dem Grade möglicher Parallelosirung bestehet, ist bey der rechtwinklichten Begrenzung = 0.

Beweis.

Bey jeder andern Abweichung, ist sie dem Parallelolismus näher gerückt, wie wir dieß bereits oben umständlich gezeigt haben.

42. Grundsatz.

§. 85.

Jede Annäherung zum Parallelolismus, bestimmt die Function positiv, jede Entfernung aber, bestimmt sie negativ.

Beweis.

Es hat hier eben die Bewandniß, die es mit der ersteren hatte, wo wir alles auf das Maximum wechselseitiger Begrenzung bezogen.

43. Grundsatz.

§. 86.

Wenn der Parallelolismus das Maximum der Function bestimmt, so gibt es für die Function selbst, keine Maxima von heterogener Art.

Beweis.

Wenn der Parallelolismus das Maximum ist; so kann keine Vergleichung Statt finden; denn bey dem Parallelolismus, hört alle Bestimmung der Größen auf, und es ist folglich, an keine Vergleichung zu gedenken, wie das bey dem Maximum der Wechselbegrenzung der Fall war. Jede Annäherung zum Maximum, ist also im gegenwärtigen Falle positiv.

44. Grundsatz.

§. 87.

Das veränderliche Verhältniß AG : AC (Fig. 33.) bestimmt die gegenwärtige Function.

Beweis.

Mit der Abweichung = a wächst AG, und wenn a das Maximum erreicht hat, so wird CG mit AG parallel, und folglich AG in Vergleichung mit AC unbestimmbar, gerade wie es der Parallelolismus erfordert.

Erklärung.

§. 88.

Das für jede Abweichung bestimmte Verhältniß der gegenwärtigen Function, ist eine trigonometrische Function, welche allgemein tang. φ bezeichnet wird, weil AG die Tangente am Kreise ist. Cotang. φ ist gegenwärtig in Beziehung auf den Parallelolismus eben das, was cos. φ in Beziehung auf Wechselbegrenzung war. Die verschiedenartigen Bestimmungen einer Größe, welche eine Function von tang. φ ist, läßt sich auf ähnliche Art, nach dem bereits angegebenen Princip, beurtheilen. Es ist aber tang. φ^{I} und cotang. φ^{I} beyde negativ, weil sie in Beziebeziehung auf den Parallelolismus, die Function negativ bestimmeu; denn sie bestimmen beyde, eine Entfernung von dem Parallelolismus, oder eine Annäherung zur rechtwinklichten

Wechselbegrenzung. Dahingegen ist tang. φ^{II} und cotang. φ^{II} wiederum beyde positiv, sie bestimmen beyde eine Annäherung zu dem Parallelolismus; und aus eben dem Grunde ist tang. φ^{III}, cotang. φ^{III} wiederum negativ.

Anmerkung.

Das, was ich bisher gesagt habe, enthält das Wesentlichste der Trigonometrie; das übrige, sind bloß algebraisch geometrische Aufgaben, welche die weitere Ausführung der Geometrie auflösen wird. Es wird ein jeder auch schon von selbst einsehen, daß, wenn man einmahl, für irgend einen bestimmten Halbmesser, die trigonometrische Functionen berechnet hat, man dadurch in den Stand gesetzt ist, ein Glied der trigonometrischen Function zu bestimmen, wenn eines davon gegeben ist, wie dieses aus (§. 78.) erhellet, auch aus der Function die Abweichung zu bestimmen. Man hat zu diesem Ende Tafeln construirt, welche unter dem Nahmen trigonometrischer Tafeln bekannt genug sind. Von ihrer Einrichtung wird die weitere Ausführung handeln.

Ich wende mich nunmehr zu einem andern Theile der Geometrie, von welchem ich auch bloß das Wesentliche abhandeln kann.

Zweyte Abtheilung.

Die Stereometrie.

Erklärung.

§. 89.

Die Stereometrie, oder die Lehre von der Begrenzung des geometrischen Raums und Bestimmung desselben, ist freylich eine verwickeltere Lehre, als die eigentliche Grenzenlehre, welche wir bisher abgehandelt haben. Ihre Principien hingegen, sind ganz die nähmlichen. Wir werden uns daher, mit den Gründen derselben, kürzer fassen können, indem wir, für mehrere Grundsätze den Beweis, in der Grenzenlehre nachweisen werden.

Fundamental-Grundsatz der ganzen Lehre.

§. 90.

So wie wir bisher die Grenze, als ein Glied einer unbestimmbaren Summe von möglichen Grenzen angesehen haben, deren Summe die Fläche selbst ist, so können wir auch die Fläche selbst, als ein Glied einer unbestimmbaren Summe von möglichen Flächen ansehen, deren Summe der geometrische Raum ist.

Beweis.

Daß die Fläche selbst, als eine Grenze gedacht werden muß, folgt schon von selbst daraus,

daß wir sie, als eine unbestimmbare Summe von möglichen Grenzen angegeben haben. Wenn sie aber selbst, als eine Grenze gedacht werden soll; so muß auch offenbar dasjenige, was sie begrenzt, eine Summe von Gliedern seyn, die alle, dieser Grenze selbst gleich sind, weil sie als das letzte Glied in dieser Summe angesehen werden muß.

Erklärung.

§. 91.

Die Grenzen des geometrischen Raums, soll schlechthin, die Fläche heißen. Man wird es schon zum voraus einsehen können, daß alle Bedingungen der Begrenzung der Fläche, die wir oben festgesetzt haben, auch bey der Begrenzung des Raums nothwendig seyn werden; daß ferner auch, die Begrenzung des Raums, von der wechselseitigen Begrenzung der Flächen abhängen wird, so wie oben, die Begrenzung der Fläche, von der wechselseitigen Begrenzung der Grenzen abhing; und daß endlich, alle die Regeln der Begrenzung, die wir oben angegeben haben, auch hier Statt finden müssen, weil die gegenwärtige Lehre, von der obigen nur in so fern unterschieden ist, daß hier, von Summen möglicher Grenzen (Flächen) die Rede seyn wird, wenn oben bloß von Grenzen schlechthin, gewöhnlich die Rede war.

1. Grundsatz.

§. 92.

Durch eine einzige Fläche, ist der geometrische Raum noch nicht begrenzt.

Beweis.

Siehet man diese Fläche als Glied einer Summe an, wie es geschehen muß, so folgt der Beweis aus (§. 4).

2. Grundsatz.

§. 93.

Wenn wir uns bey einer Grenze des geometrischen Raums, den Raum, als bereits begrenzt, vorstellen, so werden diese beyden Grenzen, nicht allein Grenzen des Raums seyn, sondern sie werden sich auch unter einander wechselseitig begrenzen, und ihre wechselseitige Begrenzung, wird schlechthin eine Grenze der Fläche seyn.

Beweis.

Die Wechselbegrenzung folgt aus (§. 2). Da sich nun in dem gegenwärtigen Falle, Summen von möglichen Grenzen wechselseitig begrenzen; so wird auch eine Summe von möglichen wechselseitigen Begrenzungen der Grenzen entstehen, oder eine Grenze der Fläche.

3. Grundsatz.

§. 94.

Flächen die parallel sind, können sich nicht wechselseitig begrenzen.

Beweis.

Er muß auf eben die Art geführt werden, wie wir es oben (§. 7.) gethan haben.

Erklärung.

§. 95.

So wie wir oben gezeigt haben, daß nur durch wechselseitige Begrenzung der Grenzen, Begrenzung der Fläche möglich ist, und aus der Bestimmung der Grenzen, die der Flächen hergeleitet haben; so wird auch hier, durch wechselseitige Begrenzung der Flächen, die Begrenzung des geometrischen Raums möglich seyn, und aus der Bestimmung der Flächen, die Bestimmung des Raums hergeleitet werden müssen.

Man sieht also wiederum, und ich kann es nicht genug wiederhohlen, daß die Stereometrie, nur eine verwickeltere Grenzenlehre ist, weil hier die Glieder der Summen, durch Producte von Größen (Flächen) ausgedrückt werden müssen, wenn sie dort Größen schlechthin waren *a*).

Anmerkung.

In der Stereometrie, ist die Construction der Begrenzung fast das schwierigste Geschäft. Allein da die Wechselbegrenzung der Flächen,

a) Daher auch die sehr richtige Unterscheidung der Reihen, der arithmetischen und geometrischen.

Grenzen schlechthin sind, und von dieser Wechselbegrenzung der Flächen, die Begrenzung des geometrischen Raums abhängt; so wird man leicht im Stande seyn, alles auf Construction der Grenzen zurückführen zu können.

Erklärung.

§. 96.

Die Abweichung zweyer Flächen, ist eine Summe möglicher Wechselbegrenzungen der Flächen, in einer und der nähmlichen Grenze. Die Bedingung der rechtwinklichten Wechselbegrenzung, ist die nähmliche, welche wir oben bey den Grenzen festgesetzt haben.

4. Grundsatz.

§. 97.

Die Wechselbegrenzung von zwey Flächen, muß als ein gemeinschaftliches Glied, aus den Summen möglicher Grenzen beyder Flächen, angesehen werden.

Beweis.

Jede Fläche ist der anderen Grenze, oder jede wird durch die andere begrenzt, und die Wechselbegrenzung ist folglich einer jeden Fläche **wirkliche** Grenze.

5. Grundsatz.

§. 98.

Wenn AL (Fig. 34.) die Wechselbegrenzung zweyer Flächen vorstellt, und die beyden

Grenzen CA und AE, die Wechselbegrenzung einer dritten mit den beyden ersten vorstellt, und jede von diesen beyden Grenzen mit der Grenze AL rechtwinklicht ist; so wird auch diese dritte Fläche selbst, die beyden ersten rechtwinklicht begrenzen.

Beweis.

Alle mögliche Grenzen mit CA parallel, werden mit AL rechtwinklicht seyn; eben so die mit AE parallel sind. Die Summen dieser möglichen Grenzen, sind aber die Flächen selbst, und die beyden Grenzen CA und AE, die aus den Wechselbegrenzungen entstehen, sind als gemeinschaftliche Glieder der Summen möglicher Grenzen, so wohl der beyden Flächen, die sich in AL wechselseitig begrenzen, als derjenigen, die diese beyde begrenzt, anzusehen: folglich, werden auch die beyden ersten Flächen, von der dritten rechtwinklicht begrenzt werden.

6. Grundsatz.

§. 99.

Wenn Alles so bleibt, wie wir in dem vorhergehenden Grundsatz angenommen haben; so bestimmt die Abweichung der beyden Grenzen CA und AE, zugleich die Abweichung der beyden Ebenen, die sich in AL wechselseitig begrenzen.

Beweis.

Gedenken wir uns Summen von möglichen Grenzen mit CA und AE parallel, so werden alle diese Parallelen die Flächen selbst seyn, die sich in AL wechselseitig begrenzen, sie werden alle mit AL rechtwinklicht seyn, sich unter einander aber, unter der Abweichung CAE wechselseitig begrenzen: folglich, bestimmt die einzige Abweichung CAE, die Abweichung aller möglicher Grenzen in ihnen, d. h., der Flächen selbst.

7. Grundsatz.

§. 100.

Die Fläche, als Grenze des geometrischen Raums betrachtet, kann nur durch eine andere Fläche, begrenzt gedacht werden.

Beweis.

Die Fläche, als Grenze des geometrischen Raums, ist das letzte Glied einer unbestimmbaren Summe von möglichen Flächen, die wir uns mit ihr zugleich begrenzt vorstellen müssen, und diese Summe von Begrenzungen, ist selbst eine Fläche.

8. Grundsatz.

§. 101.

Die Grenze AL (Fig. 34.) stelle wiederum die Wechselbegrenzung zweyer Flächen vor: sie

sollen von zwey parallelen Ebenen CAE und DBF begrenzt werden. Gedenkt man sich nun diese beyden Ebenen und die ersteren beyden, von der Ebene CEDF begrenzt, und wo CD, EF, CE und DF, die daraus entstandenen Wechselbegrenzungen sind; so behaupte ich: es wird durch diese Construction der geometrische Raum begrenzt seyn.

Beweis.

Jede der Flächen, ist durch die andern ganz begrenzt, folglich auch der geometrische Raum.

9. Grundsatz.

§. 102.

Wenn die Wechselbegrenzungen CD, EF und AB (Fig. 34.), von den Wechselbegrenzungen DB, BF und DF, unter der Bedingung des Parallelolismus begrenzt werden; so haben alle drey Ebenen, aus welchen die drey erstern Wechselbegrenzungen resultiren, gegen die Ebene DBF eine und die nähmliche Abweichung.

Beweis.

Er folgt unmittelbar aus (§. 97.) und (§. 98.)

Folgerung.

Wenn daher, diese Wechselbegrenzungen CD, AB und EF, nicht unter der angegebenen Bedingung begrenzt werden; so haben sie auch

nicht eine und die nähmliche Abweichung gegen die Ebene DBF.

10. Grundsatz.

§. 103.

Wenn die beyden Ebenen DBF und CAE (Fig. 34.) parallel sind, so müssen auch ihre Wechselbegrenzungen CA, CE und AE, DB, BF und DF, von den Wechselbegrenzungen der anderen Ebenen, unter der Bedingung des Parallelolismus begrenzt werden.

Beweis.

Er folgt auch aus (§. 97.).

Erklärung.

§. 104.

Eine Begrenzung des geometrischen Raums, wie (Fig. 34.), heißt — ein Prisma.

Erklärung.

§. 105.

Wenn die beyden Flächen, die sich in AL (Fig. 34.) begrenzen, auch unter einander parallel sind, und alsdann von einer andern Fläche, mit der CDEF parallel, begrenzt werden; so heißt eine solche Begrenzung des geometrischen Raums, wie (Fig. 35.) — ein Parallelopipidum.

Erklärung.

§. 106.

Wenn bey der prismatischen Begrenzung, die Flächen, aus welchen die Wechselbegrenzungen CD, AL und EF (Fig. 34.) entstehen nicht gegen die übrigen beyden, eine und dieselbe Abweichung haben, und folglich auch, die eben benannten Grenzen, nicht mehr parallel seyn werden, so entsteht eine Begrenzung des geometrischen Raums, wie (Fig. 36.), und heißt — eine Pyramide.

Erklärung.

§. 107.

Die Oberfläche eines geometrischen Raums, ist die Größe der Begrenzung desselben, als solche schlechthin betrachtet, d. h., wo wir jeden Theil der Begrenzung, als eine Grenze schlechthin betrachten, oder als ein einzelnes Glied einer möglichen Summe. Der Inhalt eines geometrischen Raums ist die Bestimmung der Summe möglicher Grenzen, zu welchen die Oberfläche selbst, gleichsam als letztes Glied gehört.

Erklärung.

§. 108.

Wenn die Oberfläche des geometrischen Raums, aus Theilen besteht, deren Bestimmung, auf Bestimmung der Flächen schlechthin, so wie wir sie oben (§. 32.) angegeben haben, zurückgebracht werden kann; so siehet

ein jeder leicht ein, daß das Geschäft, keine große Schwierigkeiten haben kann. Ich kann daher die Bestimmung der Oberflächen, der Begrenzungen, die wir (§. 104. 105. 106.) angegeben haben, füglich übergehen, weil ihre Bestimmung die nähmliche ist, welche wir oben (§. 32.) angegeben haben. Ich wende mich daher gleich, zu der Bestimmung des **Inhalts** derselben.

Erklärung.

§. 109.

Die **Höhe** eines begrenzten geometrischen Raums, ist die Summe möglicher Flächen, die in dem bestimmten geometrischen Raume enthalten sind. Setzt man also diese bestimmte Summe der Flächen $= x = S . dx$, wo dann jedes dx, eine mögliche Fläche zählt, und setzt allgemein eine solche Fläche $= X = z . y$, so hat man zur allgemeinen Bestimmung des Inhalts: $x . y . z =$ dem Inhalte des begrenzten geometrischen Raums.

Anmerkung.

Man hat daher die Benennung der drey Abstuffungen des geometrischen Raums genommen.

II. Grundsatz.

§. 110.

Die Summe möglicher Ebenen, in einem begrenzten geometrischen Raume, ist bestimmt,

durch die Wechselbegrenzung zweyer Ebenen, welche beyde, die Summe möglicher Ebenen, alle rechtwinklicht begrenzt.

Beweis.

Der Bedingung nach, sollen alle mögliche Ebenen, in dem geometrischen Raume, mit den beyden angenommenen Ebenen, rechtwinklicht seyn; folglich, werden auch die Wechselbegrenzungen, der möglichen Ebenen, mit den beyden angenommenen, mit der Wechselbegrenzung der beyden Ebenen selbst, rechtwinklicht seyn, (s. §. 98.). Für eine jede solche Wechselbegrenzung ist eine Fläche im geometrischen Raume nothwendig, und die Summe dieser rechtwinklichten Wechselbegrenzungen, ist die Größe der Wechselbegrenzung der beyden angenommenen Ebenen.

Anmerkung.

Man nennt dieses Maß: das Perpendicul von dem ersten Gliede der Summe möglicher Flächen, auf das letzte gefällt, wo alsdann das letzte Glied die Basis heißt.

Aufgabe.

§. 111.

Den Inhalt eines rechtwinklichten Parallelopipidums zu bestimmen?

Auflösung.

(Fig. 35) sey ein solches rechtwinklichtes Parallelopipidum. Nimmt man nun die be-

grenzte Fläche ACBD zur Basis an, so wird jede von den Wechselbegrenzungen GA, IC, HB und MD das Perpendicul seyn können. Setzt man also die Basis = x = a . b und das Perpendicul = c, so hat man: Inhalt = a . b . c.

Anmerkung.

Wenn die Größen a, b und c unter sich gleich sind; so heißt eine solche Begrenzung — ein Cubus, sein Inhalt wäre alsdann = a . a . a.

Aufgabe.

§. 112.

Den Inhalt eines Prisma (Fig. 34.) zu bestimmen?

Auflösung.

Ich nehme an, das Perpendicul sey gleich dem des Parallelopipidums (Fig 35.). Ferner, sollen die Grenzen DB und BF in dem Prisma, gleich seyn den Grenzen CD und AB in dem Parallelopipidum, so wird die Fläche des Prisma = X^1 sich verhalten, zur Fläche des Parallelopipidums = X, wie 1 : 2, und folglich $\frac{X . c}{2}$, wenn wir das Perpendicul = c setzen, = dem Inhalt des Prisma.

Erklärung.

§. 113.

Wir können allgemein, jeden Inhalt einer Begrenzung des geometrischen Raums, mit

S.X.dx bezeichnen. Wenn nun X, in der ganzen Summe von möglichen Gliedern, unveränderlich bleibt; so hat die Summation selbst gar keine Schwierigkeit, wie wir dieß bey dem Parallelopipidum und dem Prisma gesehen haben. Wenn hingegen, X ein veränderliches Glied in der Reihe ausdrückt, und sich bey der Summation mit x ändert, so hat die Sache schon mehr Schwierigkeit, und die Bestimmung des Inhalts eines solchen begrenzten geometrischen Raums, beruhet alsdann auf Gründen, die hier nicht gut vorgetragen werden können, ohne die festgesetzte Grenze zu übertreten. Ich werde also nur, die Möglichkeit einer solchen Bestimmung des Inhalts zeigen, und die Bestimmung selbst, als unerwiesene Resultate beyfügen.

Aufgabe.

§. 114.

Den Inhalt einer Pyramide (Fig. 36.) zu bestimmen.

Vorbereitung.

Zur Erleichterung der Einsicht nehme ich an, es sey DF in der Basis der Pyramide, die Wechselbegrenzung, welche entstehet, wenn wir uns, so wohl auf der Basis, als auf der Fläche ABC, eine Fläche rechtwinklicht gedenken. Eben dieses soll die Grenze df, für ein beliebiges Glied, aus der Summe mög-

licher Flächen in der Pyramide, vorstellen; so wird die Größe der Basis $= X = \frac{BC \cdot DF}{2}$ seyn, und die Größe des willkürlich angenommenen Gliedes aus der Summe wird seyn: $\frac{bc \cdot df}{2} = X^1$ (s. §. 38). Setzt man nun: $BC : bc = q$ und $DF : df = q^1$, so ist $X : X^1 = q \cdot q^1$ (s. §. 33). Es ist aber $DF : df = AD : dA$ und $AD : Ad = AB : Ab$ folglich: $DF : df = AB : Ab = q^1$ (s. §. 21). Es ist aber auch $BC : bc = AB : Ab$, folglich wird $X : X^1 = q^1 \cdot q^1 = AB^2 : Ab^2$, wie man es auszudrücken pflegt. Gedenkt man sich nun auch eine Wechselbegrenzung, welche in der Pyramide das Perpendicul seyn soll (s. §. 110.), und man setzt dieses Perpendicul $= c$ für die Basis, und für das willkürliche angenommene Glied $= x$; so hat man auch $c : x = AB : Ab$ und folglich $X : X^1 = q^1 \cdot q^1 = \frac{c^2}{x^2}$. Es wird daher, jede andere Begrenzung in der Pyramide, mit der Basis $= X$ parallel, seyn: $X^1 = X \cdot \frac{x^2}{c^2}$. Als Element der Summe wird man haben $X \cdot \frac{x^2}{c^2} \cdot dx$ (s. §. 110.).

Auflösung.

Man setze auch, die unbestimmbare Summe der möglichen Elemente in der Pyramide $= S$, und die Basis bleibe $= X$; so hat man im gegenwärtigen Falle: Inhalt der Pyramide

$$= S . X . \frac{x^2}{c^2} dx.$$

Anmerkung.

Die Integral-Rechnung lehrt, daß

$$\frac{X}{c^2} . S . x^2 . dx = \frac{X}{c^2} \tfrac{1}{3} x^3.$$

Für den Fall $x = c$, würde das Integral, den ganzen Inhalt der Pyramide bestimmen, und seyn $= \frac{Xc}{3}$. Nun ist aber Xc der ganze Inhalt des Prisma; wenn in beyden X und c gleich sind. Folglich, wird sich der Inhalt der Pyramide, zu dem des Prisma verhalten, wie 1 : 3, und die drey unter einander, werden sich verhalten wie 1 : 2 : 3.

Von den transcendenten Begrenzungen des geometrischen Raums.

Erklärung.

§. 115.

Wir haben bisher, solche begrenzte geometrische Räume betrachtet, deren Inhalt, wir als eine Summe von möglichen schlecht-

hin begrenzten Flächen ansehen konnten. Nunmehr wollen wir solche Begrenzungen betrachten, deren Inhalt, wir als eine Summe von möglichen transcendentisch begrenzten Flächen ansehen müssen. Man pflegt gewöhnlich in den ersten Elementen, bloß diejenigen Begrenzungen zu betrachten, die unter dem Nahmen der **Kugel, Cylinder** und **Kegel** bekannt genug sind, und das deßhalb, weil da, die möglichen Flächen, vom Kreise begrenzt werden, eine transcendente Grenze, von der allein in den Elementen gesprochen wird.

Erklärung.

§. 116.

Wenn ABC (Fig. 33.) eine Kreisfläche, und CC^1 die Wechselbegrenzung zweyer Flächen vorstellt, die mit dieser Kreisfläche rechtwinklicht ist, so heißt, eine Summe von möglichen gleichen Kreisflächen, die alle mit der ABC parallel sind, die sich nur möglichst mit den beyden Flächen, rechtwinklicht wechselseitig begrenzen können — ein **Cylinder**.

Anmerkung.

Der Cylinder kann also als ein Prisma angesehen werden, in dem jede mögliche Fläche, transcendentisch begrenzt ist; CC^1 ist auch hier ein Perpendicul, und wenn das Perpen-

dicul so angenommen wird, daß es gerade den Mittelpunct der Kreisfläche trifft; so heißt das Perpendicul CC^1 — **die Achse des Cylinders.**

Erklärung.

§. 117.

Wenn man sich bey der Pyramide, die Summe der möglichen Flächen, von Kreisen begrenzt vorstellt, also Kreisflächen sind, so heißt, eine solche Begrenzung des geometrischen Raums — **ein Kegel** (Fig. 37).

Erklärung.

§. 118.

Eine Summe von möglichen Kreisflächen, deren Durchmesser aber, von einem Gliede zum andern, in der Summe so abnehmen, daß wir uns diese Summe von Durchmessern, *als Sehnen* einer Kreisfläche vorstellen können, wie (Fig. 39.) heißt — **eine Kugel.**

Anmerkung.

Die Kugel unterscheidet sich also von dem Kegel darin, daß wir uns, die abnehmenden Durchmesser der möglichen Kreisflächen *beym Kegel*, alle durch eine Grenze **schlechthin** begrenzt vorstellen; in der *Kugel* hingegen, von einer transcendenten Grenze.

Von der Bestimmung der Oberflächen der Kugel, Kegel und Cylinder.

12. Grundsatz.

§. 119.

Die Größe der Kreisfläche ist $= r \cdot \pi^1$, wo r der Halbmesser derselben ist, und π^1 die Größe des Kreises ist.

Beweis.

Es sey (Fig. 20.) in A eine relative Wechselbegrenzung im Kreise (s. §. 46.) in d eine andere, so aber, daß die Abweichung φ eine elementarische Abweichung seyn mag. So haben wir oben (§. 47.) gezeigt, daß man allgemein zur Vergleichung, zwischen der relativen Größe des Kreises, und der absoluten desselben hat: $\frac{ds}{d\varphi} = f(r)$, das heißt: es sind in einem Kreisbogen $= s$, r mal absolute Wechselbegrenzungen möglich, für eine relative Wechselbegrenzung, wie die in A oder in d. Man setze nun $Ac = k$, so wird k, die Summe möglicher absoluten Wechselbegrenzungen im Kreise seyn, für die eine relative in A. Es ist aber $\frac{kr}{2}$ die Größe der Fläche, welche von der Grenze k begrenzt wird (s. §. 38). Man setze die Summe dieser möglichen Theile

$= k$ in dem halben Kreise, $= S$, so wird $S.k.\frac{r}{2}$ seyn die Größe der halben Kreisfläche, und der ganzen Kreisfläche Größe wird seyn: $2 S k \frac{r}{2} = S.k.r.$ Es ist aber $S.k = \pi^{1}$ folglich $\pi^{1}.r =$ der Größe der Kreisfläche.

Erklärung.

§. 120.

Die Oberflächen, müssen eigentlich als gemeinschaftliche Begrenzungen angesehen werden, welche, die ganze Summe möglicher Flächen, die den Inhalt ausmachen, gemeinschaftlich begrenzt; und die Oberfläche eines begrenzten geometrischen Raums bestimmen, heißt: die Größe einer Fläche bestimmen, die alle mögliche Flächen, welche den Inhalt ausmachen, gemeinschaftlich begrenzt.

Aufgabe.

§. 121.

Man soll die Oberfläche des Cylinders bestimmen.

Auflösung.

Die Summe möglicher Kreisflächen in dem Cylinder (Fig. 38.) sind alle, von gleichen Durchmessern, sie werden daher alle von Grenzen begrenzt werden können, die gleich CC^{1}

sind. Setzt man nun den Kreis, der die Basis des Cylinders begrenzt, und dem die übrigen alle gleich sind, $= s = S.ds$: so werden offenbar, auf der Oberfläche des Cylinders, so viele Grenzen CC^1 oder EA möglich seyn, als ds in s, folglich wird die Oberfläche des Cylinders $= c.Sds = cs$, wenn man $EA = c$ setzt.

Anmerkung.

Man kann auch sagen $C = S.dc$, und folglich hat man, die Oberfläche des Cylinders $= s.S.dc$, und hieraus ergibt sich auch $s.c.$

Aufgabe.

§. 122.

Die Oberfläche eines Kegels zu bestimmen.

Vorbereitung.

Man kann sich bey dem Kegel die Vorstellung machen, daß die Grenze AH (Fig. 37.) bey der Bestimmung der Oberfläche desselben, eben das ist, was uns bey dem Cylinder, die Grenze CC^1 oder AE war; nur mit dem Unterschiede, daß bey jedem dc, der Durchmesser des Kreises anders ist, und gleichsam mit von dem Zustande abhängt, in welchem wir uns c begrenzt vorstellen, welches bey dem Cylinder nicht der Fall war, wo bey jeder

Begrenzung von c, s immer die nähmliche Bestimmung beybehielt. Man kann sich also bey dem Kegel vorstellen, die Grenze A H bestimme die Summe möglicher Begrenzungen von Kreisflächen, in welchem sich die Halbmesser nach einer gewissen Regel ändern.

Auflösung.

Man setze nun den Durchmesser des Kreises der Basis A B $= d$ (Fig. 37.), die Größe des Kreises sey $= \pi$: setzt man nun den Durchmesser eines andern Kreises in dem Kegel, wie etwa $ab = y$; so wird die Größe dieses Kreises seyn, wenn man sie $= \pi^{1}$ setzt, $\pi^{1} = \frac{y\pi}{d}$, denn es ist $\pi^{1} : \pi = d : y$ (s. §. 44.), und wenn man das Verhältniß $\frac{\pi}{d} = k$ setzt: so ist allgemein für jeden möglichen Kreis, der eine mögliche Fläche in dem Kegel begrenzt, $\pi^{1} = yk$. Man hat also zum Element der Oberfläche, wenn wir $aH = s$ setzen, $= y\ k . ds$, und die ganze Oberfläche: $= S . k . y . ds$.

Anmerkung.

Es sey die Grenze $AH = a$, so hat man in dem Kegel $a : s = d : y$, folglich $s = y . \frac{a}{d}$ und $ds = \frac{a}{d} . dy$. Setzt man diesen Aus-

druck für ds, in den für das Element der Oberfläche, so erhält man $k . \frac{a}{d} . y dy$ und $S . k \frac{a}{d} . y . dy =$ die Größe der Oberfläche.

Die Integral-Rechnung lehrt, daß

$$k \frac{a}{d} S . y . dy = k \frac{a}{d} \frac{y^2}{2} \text{ ist.}$$

Für $y = d$ wäre die Größe der ganzen Oberfläche bestimmt, nähmlich: $\frac{kad}{2}$. Es ist aber kad die Oberfläche eines Cylinders, dessen Basis durch einen Kreis $= kd \pm \pi$ begrenzt wird, und in welchem $CC^1 = a = AH$ ist; folglich verhalten sich, die Größen der Oberflächen des Kegels und Cylinders gegen einander, wie 1 : 2.

Aufgabe.

§. 123.

Die Oberfläche der Kugel zu bestimmen.

Auflösung.

AH in dem Kegel, ist hier ein Kreis, der alle mögliche Flächen in der Kugel begrenzt. Man hat also auch hier, für das Element $k . y . ds$, wo aber ds ein Element des Kreises ist.

Anmerkung.

Um nun die Summe dieser Elemente zu bestimmen, haben wir nur nöthig, für ds die

Vergleichung zwischen ds und dy zu setzen. Wir wollen anuehmen, DE (Fig. 40.) sey der Durchmesser eines Kreises, der alle mögliche Kreisflächen in der Kugel begrenzt (ein größter Kreis). Es sey also, ADE die Hälfte der Kugel, deren Oberfläche wir zuerst bestimmen wollen. Es sey $CE = r$ und $ce = y^1 = \sin. x$, wo x dasjenige ist, was wir in der Trigonometrie, mit φ bezeichnet haben. Nuu lehrt die Analysis, daß $ds = \frac{r\,dy^1}{\sqrt{(r^2 - y^{12}}}$. Diesen Ausdruck für ds gesetzt, so erhält man für das Element der Kugel $\frac{k.2r\,y^1.dy^1}{\sqrt{(r^2 - y^{12})}}$. Die Summe ist $= 2kr\sqrt{(r^2 - y^{12}}$. Für $y = 0$ ist die halbe Oberfläche $2kr^2$ und die ganze Oberfläche $4kr^2$. Es verhält sich also die Größe der Oberfläche einer Kugel, zu der Größe der größten Kreisfläche eben und der nähmlichen Kugel, wie 4 : 1.

Von dem Inhalt der transcendent begrenzten geometrischen Räume.

Aufgabe.

§. 124.

Den Inhalt des Cylinders zu bestimmen.

Auflösung.

Setzt man CC^I oder EA (Fig. 38) $= d$, und die Fläche der Basis $\pi^I \cdot r$ (s. §. .), so ist der Inhalt des Cylinders $= \pi^I \cdot r \cdot d$.

Beweis.

Er ist von dem, welchen wir bey dem Parallelopipidum geführt haben, um gar nichts verschieden.

Aufgabe.

§. 125.

Den Inhalt des Kegels zu bestimmen.

Auflösung.

Man setze $\frac{y}{2} = y^I$, so ist für die Fläche ky^{I2} (s. §. 122.), und für das Element $ky^{I2} \cdot dx$, also $S \cdot ky^{I2} dx =$ dem Inhalte.

Anmerkung.

Wenn wir die Fläche der Basis $= r . \pi^{1}$ setzen: so können wir auch hier, nach (§. 114.) jede mögliche Fläche in dem Kegel durch $\pi^{1} . r \frac{x^2}{c^2}$ ausdrücken. Man wird also für das Element auch haben: $\pi^{1} . r \frac{x^2}{c^2} . dx$. Die dazu gehörige Summe ist: $\frac{\pi^{1} . r}{3 c^2} . x^3$, und für $x = c$, ist die ganze Summe in dem Kegel $= \frac{\pi^{1} r . c}{3}$.

Aufgabe.

§. 126.

Den Inhalt der Kugel zu bestimmen.

Auflösung.

IH (Fig. 41.) sey ein Halbmesser einer möglichen Kreisfläche in der Kugel: er sey $= y^{1}$. Für sie sey allgemein $ID = x$, so ist: $k y^{1\,2} dx =$ dem Element des Inhalts.

Anmerkung. I.

Bey dem gegenwärtigen Falle, muß $y^{1\,2}$, aus folgender Vergleichung zwischen x und y^{1}

hergeleitet werden. $y^{I\,2} = 2r \cdot x - x^2 = (2r - x)x$; man erhält also für das Element: $k(2rx\,dx - x^2 dx)$. Die Summe hiervon ist $krx^2 - \frac{k}{3}x^3 = \frac{kx^2}{3}(3r - x)$ für $x = 2r$, ist der Inhalt der ganzen Kugel $k \cdot \frac{4}{3}r^3$.

Anmerkung II.

Wenn man die Größen d und c bey dem Cylinder und Kegel $= 2r$ setzt, und nimmt an, daß diese in dem Kegel, Cylinder und der Kugel, die nähmliche sey, setzt ferner den Inhalt des Cylinders $= \Sigma$ der Kugel $= \Sigma^I$ und des Kegels $= \Sigma^{II}$: so wird folgendes Verhältniß unter ihnen Statt finden: $\Sigma : \Sigma^I : \Sigma^{II} = 3:2:1$. Dieses Verhältniß hat Archimedes schon angegeben; nicht aber wie der Schwärmer Pythagoras, aus überschwenglicher Freude, 100 Stück Ochsen hinwürgen lassen; vielmehr hat er die Entdeckung, durch den Meißel der Unsterblichkeit, auf seinem Leichensteine verewigen lassen.

Die sphärische Trigonometrie.

Erklärung.

§. 127.

Die sphärische Trigonometrie ist von der ebenen Trigonometrie nur darin unterschieden, daß die Aufgabe, welche sie aufzulösen hat, eine weitläuftigere Auflösung erfordert, als die der ebenen Trigonometrie. In der ebenen Trigonometrie haben wir die Möglichkeit gezeigt, wie man aus dem Verhältniß der Grenzen, ihre Abweichung, und umgekehrt, aus der Abweichung, das Verhältniß der Grenzen bestimmen könne.

Es konnte nicht fehlen, die Aufgabe für die Grenzen, mußte am Ende, auf die Aufgabe für die Flächen nothwendig führen, die folgender Maßen ausgedrückt werden kann: Aus der Abweichung der Grenzen, welche aus der wechselseitigen Begrenzung der Flächen entstehet, die Abweichung der Flächen, und umgekehrt, aus der Abweichung der Flächen, die der Grenzen zu bestimmen. Die Regeln, wie diese Aufgabe, nach Verschiedenheit der gegebenen Umstände, aufgelöset werden kann, enthält die stereometrische Trigonometrie, und ist, unter dem Nahmen der sphärischen Trigonometrie, bekannt.

Erklärung II.

§. 128.

Der Nahme der sphärischen Trigonometrie, kömmt eigentlich von der Methode her, wie der Geometer diese Regeln bestimmt, wie wir bald hören werden. Wenn ABCD (Fig. 42.) eine Pyramide vorstellt, so sind die Winkel BAD, DAC und BAC die Abweichungen der Grenzen, welche aus den wechselseitigen Begrenzungen der Flächen DBA und DCA, mit der BAC, entstehen. Man nehme an, die Fläche DCA sey mit BAC rechtwinklicht; es sey ferner dc mit AC rechtwinklicht, und bd und cb mit AB rechtwinklicht, so wird der Winkel dbc = seyn der Abweichung der beyden Flächen ABD und ABC (s. §. 99.). Ich will nun die Abweichung der Grenzen, nach der Ordnung, wie ich sie angegeben habe, mit φ, φ^{I}, φ^{II}, bezeichnen, und $AD = k$, $bd = x$ und $cd = y$ setzen; will ferner annehmen, man habe für einen Radius $= r$, die trigonometrische Functionen, berechnet; so wird man haben: $x = \frac{k \sin. \varphi}{r}$ und $y = \frac{k \sin. \varphi^{I}}{r}$. Setzt man nun den Winkel $cbd = \pi$, so erhält man in dem rechtwinklichten Dreyecke $bdc : r : \sin. \pi = \frac{k. \sin. \varphi}{r} : \frac{k \sin. \varphi^{I}}{r}$, d. i., wie $\sin. \varphi : \sin. \varphi^{I}$. Es ist ferner

$Ac : cb = r : \sin. \varphi^{II}$. Es ist aber auch

Erklärung IV.

§. 131.

Man findet nach Anleitung der Erklärung III. in dem Dreyecke ABP.

5) r : sin. BP = sin. P : sin. BA,

und auch

6) r : sin. PA = tang. P : tang. BA.

Aus dem Dreyeck PDN erhält man in der gewissen Beziehung auf das Dreyeck ABP.

7) r : Cos. PA = Cos. BA : Cos. BP.

8) r : Cos. B = Cotang. BA Cotang. BP.

Verbesserungen.

Seite 24. in der Folgerung Zeile 6. statt $e + c\Sigma$ lese $e + c = \Sigma$.

— 39. im Beweis Z. 2. st. $b = q. d.$ l. $b = q' d$.

— 48. im Grundsatz Z. 9. st. $Z:S$ l. $s:z$.

— 78. in der Erklärung Z. 1. st. Grenzen, l. Grenze.

— 106. in der Erklärung Z. 11. st. KN l. KB.

— — — Z. 11. st. Diameter l. radius.

— 7. in der Vorrede Z. 13. st. die Verständniß l. das Verständniß.

Tab. I.

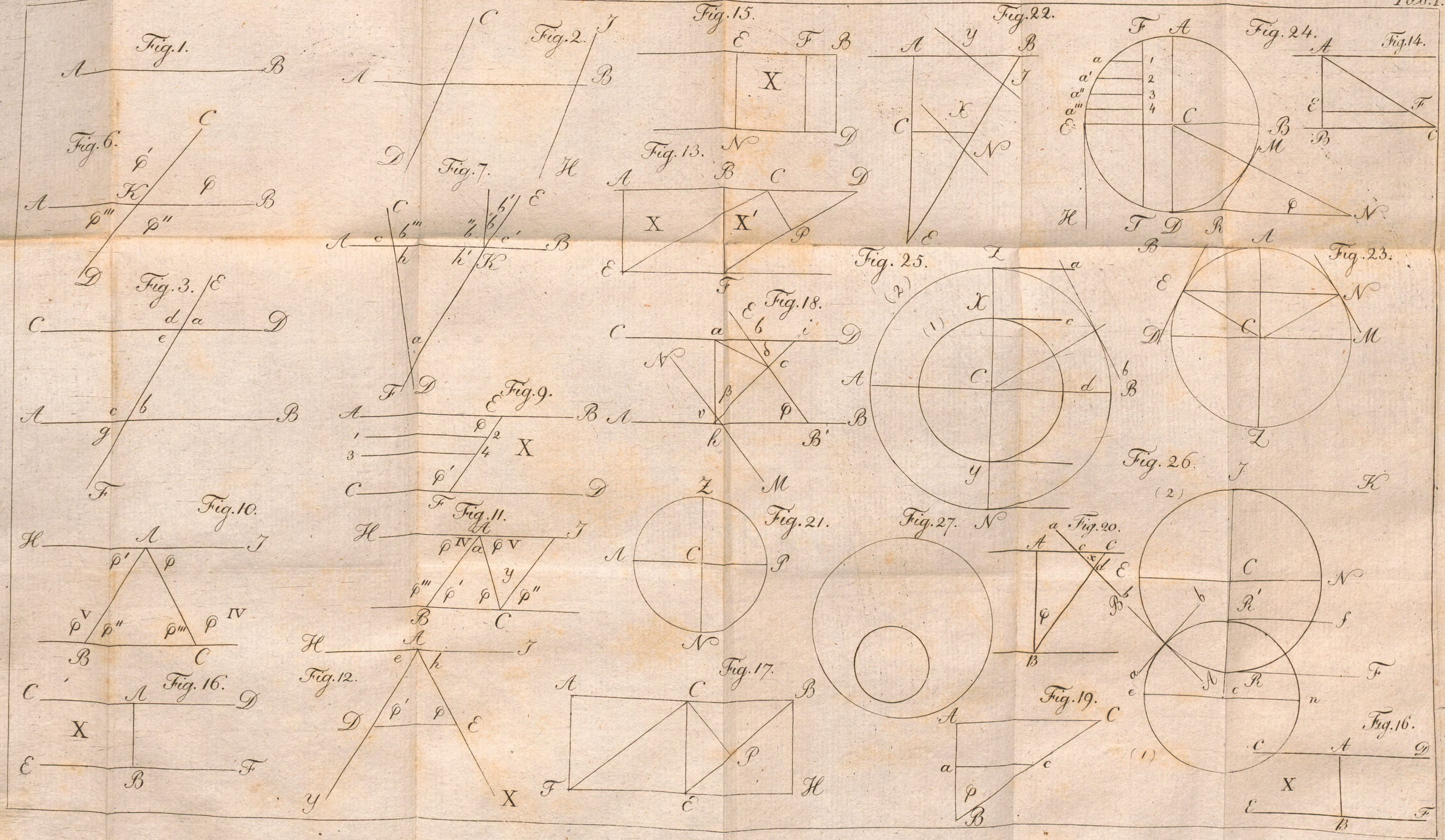
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 16.

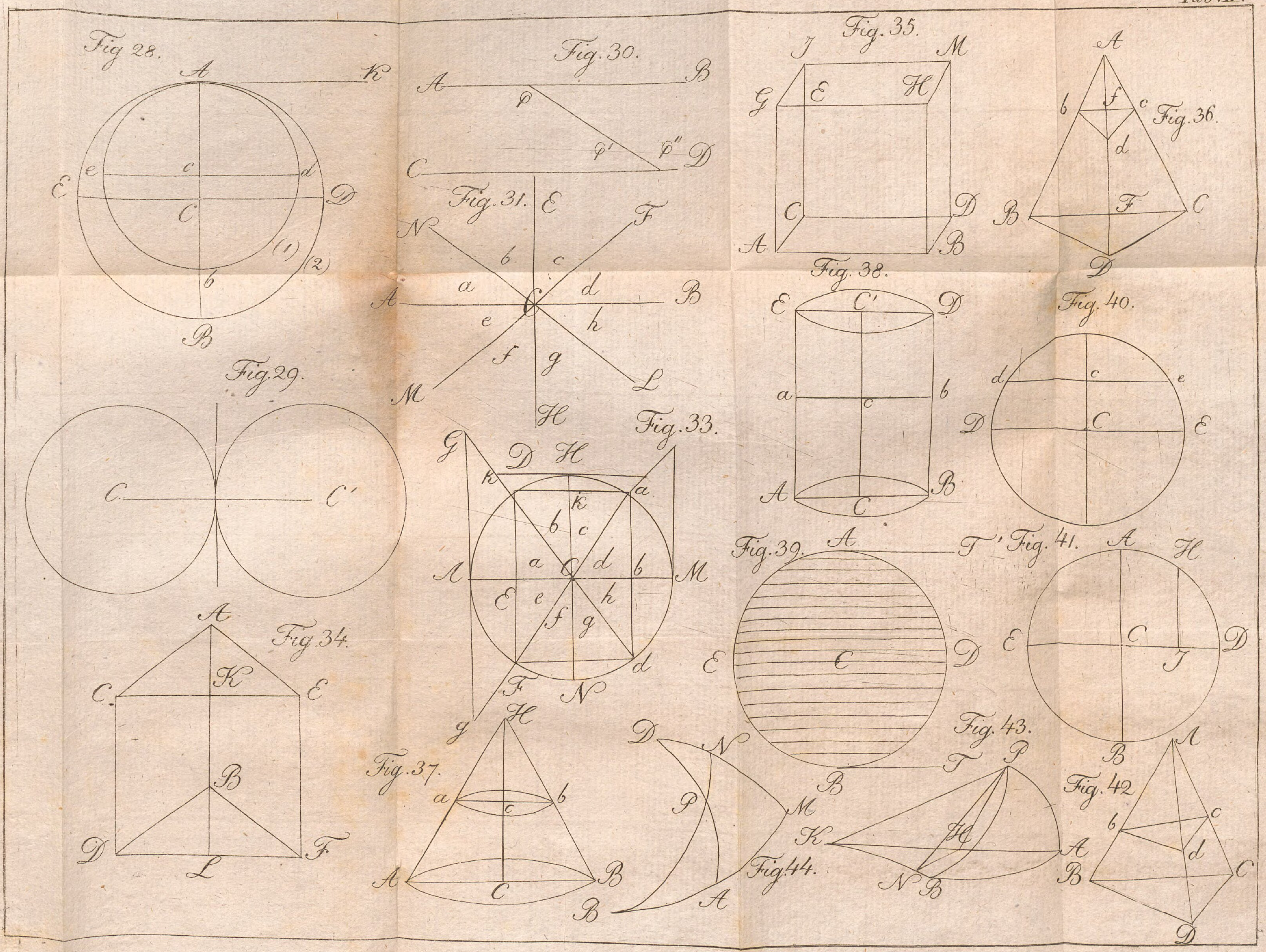
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Detmold, Wilhelm

Die Lehre von den Grenzen ...

Göttingen 1804

Math.p. 108
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081660-6